corrigé DS 2 octobre 2020

spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **8 points**

1. $f(x) = \frac{1}{2}\left[x + (1-x)\mathrm{e}^{2x}\right]$

   a. On a (croissance comparée) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   $f(x) = \frac{1}{2}(x\mathrm{e}^{-2x} + 1 - x)$; la limite de $x\mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty$ est égale à 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-2x} = -\infty$. Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   b. On calcule la différence $d(x) = f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{2x}$. On sait que $\frac{1}{2}e^{2x}$ est positif pour tout réel x . Donc d(x) est du signe de $1-x$. Conclusion $(\mathscr{C})$ est au dessus de Δ sur $]-\infty; 1[$ et en dessous sur $]1; +\infty[$

2. x, $(1-x)$ et e^{2x} sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f fonction obtenue par somme et produit de ces fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = \frac{1}{2}x + \left(\frac{1-x}{2}\right)\mathrm{e}^{2x}$; $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}(1-2x) = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}\right]$.

3. $u(x) = 1 + (1-2x)\mathrm{e}^{2x}$

   a. $u'(x) - 2\mathrm{e}^{2x} + 2(1-x)\mathrm{e}^{2x} = -4x\mathrm{e}^{2x}$ qui est du signe de $-x$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$		$-$			
$u(x)$	1		2		0		$-\infty$

   b. On a $u(0) = 1 + 1 = 2$ et $u(1) = 1 - \mathrm{e} < 0$. Donc sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, la fonction u est : dérivable ; monotone décroissante ; $u(0) > 0$ et $u(1) < 0$.

   Conclusion : il existe un réel unique α de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $u(\alpha) = 0$.

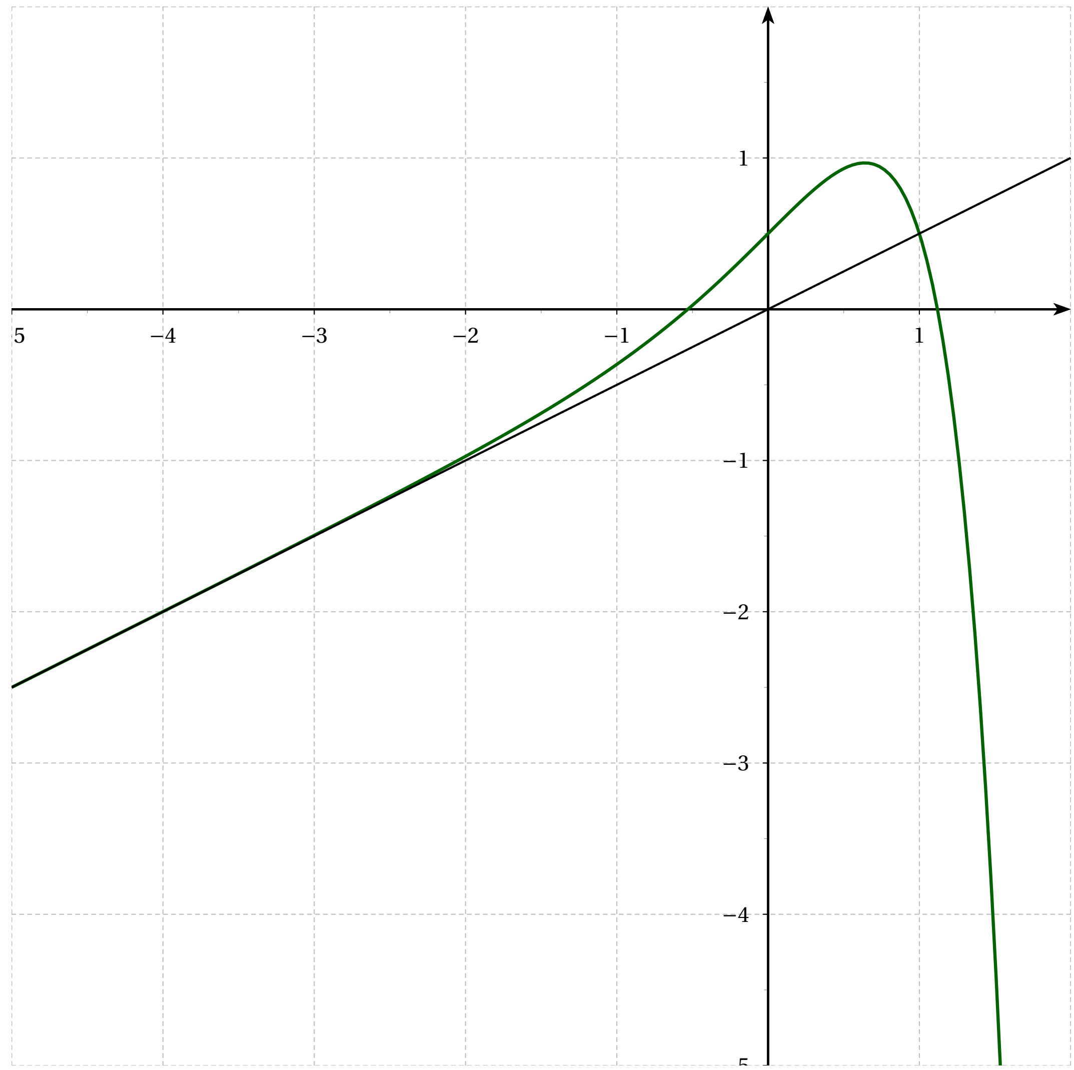
   La calculatrice livre : $u(0,63) \approx 0,08$ et $u(0,64) \approx -0,007$. Donc d'après le théorème ci-dessus $0,63 < \alpha < 0,64$. Réponse $\alpha \approx 0,64$ à 10^{-2} près par excès.

   c. Le tableau donne donc le signe de u : $x < \alpha \iff u(x) > 0$ et $x > \alpha \iff u(x) < 0$

4. On a $f'(x) = \frac{1}{2}u(x)$: le signe de f' est celui de u. On a donc le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$		$-\infty$

5. Voici la courbe :



Exercice 2 **8 points**

Partie A

1. On considère la suite (p_n) définie pour tout entier naturel n, par $p_n = n^2 - 42n + 4$.
Affirmation 1 : La suite (p_n) est strictement décroissante.

> $p_{22} = 22^2 - 42 \times 22 + 4 = -436$ et $p_{23} = 23^2 - 42 \times 23 + 4 = -433$
> $p_{22} < p_{23}$ donc la suite (p_n) n'est pas décroissante.
> **Affirmation 1 fausse**

2. Soit a un nombre réel. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

- $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}$;
- $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Affirmation 2 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout n, $v_n = u_n^2 - 1$ donc $u_n^2 = v_n + 1$.

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{u_n^2+8}\right)^2 - 1 = \frac{1}{9}\left(u_n^2+8\right) - 1 = \frac{1}{9}u_n^2 + \frac{8}{9} - 1 = \frac{1}{9}(v_n+1) - \frac{1}{9}$$
$$= \frac{1}{9}v_n + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{9}$.

Affirmation 2 vraie

3. On considère une suite (w_n) qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n$.

Affirmation 3 : La suite (w_n) converge.

Pour tout n non nul,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n \iff \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$
$$\iff \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{n^2+n}{n^2+2n+1}$$
$$\iff \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 \leqslant w_n \leqslant \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$.

Donc la suite (w_n) converge.

Affirmation 3 vraie

Partie B

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}$.

1. $U_1 = \frac{2U_0}{1+U_0} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

2. On va démontrer par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété $\mathscr{P}_n$: $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, $\dfrac{2^n}{1+2^n} = \dfrac{2^0}{1+2^0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = U_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie pour un entier naturel n quelconque ; on va démontrer que la propriété est vraie au rang $n+1$.

  $$U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n} = \frac{2\dfrac{2^n}{1+2^n}}{1+\dfrac{2^n}{1+2^n}} = \frac{2\times 2^n}{1+2^n} \times \frac{1+2^n}{1+2^n+2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2\times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

3. On considère les trois algorithmes suivants dans lesquels les variables n, p et u sont du type nombre. Pour un seul de ces trois algorithmes la variable u ne contient pas le terme U_n en fin d'exécution.

Algorithme 1	**Algorithme 2**	**Algorithme 3**
$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$ $i \leftarrow 0$ Tant que $i < n$ $\quad u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$ $\quad i \leftarrow i+1$ Fin Tant que	$u \leftarrow \dfrac{1}{2}$ Pour i allant de 0 à n $\quad u \leftarrow \dfrac{2u}{u+1}$ Fin Pour	$p \leftarrow 2^n$ $u \leftarrow \dfrac{p}{p+1}$

Dans l'algorithme 2, le nombre i varie entre 0 et n donc prend $n+1$ valeurs ; la valeur de u en sortie est donc U_{n+1}. L'algorithme 2 ne convient donc pas.

EXERCICE 2 **8 points**

1. $\dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + \dfrac{(n+1)!}{3!(n-2)!} = \dfrac{5}{3}n^2 - \dfrac{4}{3}n \iff \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{(n-1)n(n+1)}{6} = \dfrac{n(5n-4)}{3}$

$\iff \dfrac{n(3n+3+n^2-1-10n+8}{6} = 0 \iff n = 0$ ou $n^2 - 7n + 10 = 0$.

On résout cette équation du second degré : $\Delta = 9$ donc $n = 5$ ou $n = 2$

Or $n \geq 2$ car sinon $\left(n+1//3\right)$ n'existe pas . Les solutions sont donc $n = 5$ ou $n = 2$

2. $5n = \dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{2(n-2)!} + \dfrac{n!}{6(n-3)!} \iff 5n = n + \dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\iff n(24 - 3n + 3 - n^2 + 3n - 2) = 0 \iff n = 0$ ou $25 - n^2 = 0$.

On a donc $n = 5$ ou $n = -5$

Or $n \geq 3$ donc la seule solution est $n = 5$