DS 3 Terminale 19 novembre 2020

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

1. En février, un mois se sera écoulé, donc $n = 1$. $u_1 = 0,9u_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = 294$
2. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n - 420$

   a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0,9u_n + 42 - 420 = 0,9u_n - 378 = 0,9\left(u_n - \dfrac{378}{0,9}\right) = 0,9(v_n - 420) = 0,9v_n$.

   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 420 = -140$

   b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -140 \times 0,9^n$. De plus $u_n = v_n + 420$ donc $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
3. La raison de la suite (v_n) appartient à l'intervalle $]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 420$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 420$.

   Cela signifie qu'au bout d'un certain nombre de mois, le nombre de véhicules loués va se rapprocher de 420.
4. **a.** L'algorithme de seuil complété :

$N \leftarrow 0$
$U \leftarrow 280$
Tant que $U \leqslant 380$
$N \leftarrow N + 1$
$U \leftarrow 0,9 \times U + 42$
Fin Tant que

   b. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $u_{11} \approx 376,1$ et $u_{12} \approx 380,5$.

   La variable N contient la valeur 12 à la fin de l'exécution de l'algorithme.

   c. C'est donc en janvier 2020 (12 mois après janvier 2019) que la commune devra augmenter le nombre de voitures.

EXERCICE 2 **10 points**

Partie A

1. $f(0) = 2$ (point $A(0;2)$) et $f(2) = 0$ (point $B(2;0)$).
2. Au point d'abscisse la tangente à $(C)_f$ est horizontale donc $f'(1) = 0$.
3. La tangente à $(C)_f$ est la droite (AC). Son équation est de la forme : $y = mx + p$.

   $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-2}{-2-0} = 1$ et $p = y_A - m \times x_A = 2 - 1 \times 0 = 2$.

   L'équation de la tangente à $(C)_f$ au point A a pour équation : $y = x + 2$.
4. À l'aide du graphique, on peut affirmer que sur l'intervalle $[-10;2]$ l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions distinctes l'une positive, l'autre négative.

5. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-10\,;\,1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
6. La tangente à $(C)_f$ au point d'abscisse 0 (point A) coupe la courbe : le point A est donc un point d'inflexion. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-10\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,2]$.

Partie B

1. $f(0) = (2-0)\,\mathrm{e}^{0} = 2$ et $f(2) = (2-2)\,\mathrm{e}^{2} = 0$
2. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $[-10\,;\,2]$. En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, et en posant $u(x) = 2-x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{x}$,
$\forall x \in [-10\,;\,2],\ f'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{x} + (2-x) \times \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \times (-1+2-x) = \mathrm{e}^{x}(-x+1) = (-x+1)\,\mathrm{e}^{x}$
b. $f'(1) = (-1+1)\,\mathrm{e}^{1} = 0$
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)(x-0)+f(0)$
Or $f'(0) = (-0+1)\,\mathrm{e}^{0} = 1$ et $f(0) = (2-0)\,\mathrm{e}^{0} = 2$ donc l'équation de la tangente est $y = 1\times(x-0)+2 = x+2$
4. $f(x) = 2e^{x} - xe^{x}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ par croissance comparée
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
La courbe de f admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$
5. **a.** $\forall x \in [-10\,;\,2],\ \mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x+1$
Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$ est :

x	$-\infty$		1		2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	e	↘	0

b. Il faut utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (CTVI) : la fonction f est continue et strictement croissante sur $[-\infty\,;\,1]$. Or $1 \in [0,;\ \mathrm{e}\,]$, donc d'après le CTVI, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-\infty\,;\,1]$.
À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx -1,15$
6. $\forall x \in [-10\,;\,2],\ f''(x) = -x\,\mathrm{e}^{x}$.
$\forall x \in]-\infty\,;\,2],\ \mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $-x$.
Le tableau suivant, permet d'étudier la convexité de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2
$f''(x)$		+	0	−	
Convexité de f		convexe		concave	