DS 4 Terminale 3 décembre 2020

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **12 points**

Partie A : établir une inégalité

1. **a.** $x(1-\dfrac{lnx}{x})-ln(1+\dfrac{1}{x}) = x-lnx-ln(1+\dfrac{1}{x}) = x-ln(x(1+\dfrac{1}{x})) = x-ln(x+1) = f(x)$

   b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{lnx}{x} = 0$ par croissance comparée .

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2.

   f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

   $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 1-\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{x+1}$

3. Sur $[0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$. On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

4.

   $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geq f(0)$ car f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

   $f(0) = 0$ d'où $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $x-\ln(1+x) \geq 0$

   On a donc bien $\forall x \in [0\,;\,+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$

Partie B : application à l'étude d'une suite

1.

   $u_1 = u_0 - \ln(1+u_0) = 1-\ln(2)$

   $u_2 = u_1 - \ln(1+u_1) = 1-\ln(2)-\ln(2-\ln(2)) \approx 0,0392$

2. **a.**

   <u>**Initialisation**</u> : $u_0 = 1 \geq 0$

   <u>**Hérédité**</u> : Soit n un entier naturel tel que $u_n \geq 0$

   alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après la **partie A**

   On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée à ce même rang.

   Par le principe de récurrence on peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$

   b.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = -\ln(1+u_n) \leq 0$ car $(1+u_n) \geq 1$.

   On en déduit que (u_n) est décroissante.

   c.

   (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge vers $\ell \geq 0$.

3.

   Par le théorème du point fixe , $\ell = f(\ell) \iff \ln(1+\ell) = 0 \iff \ell = 0$

4. **a.**

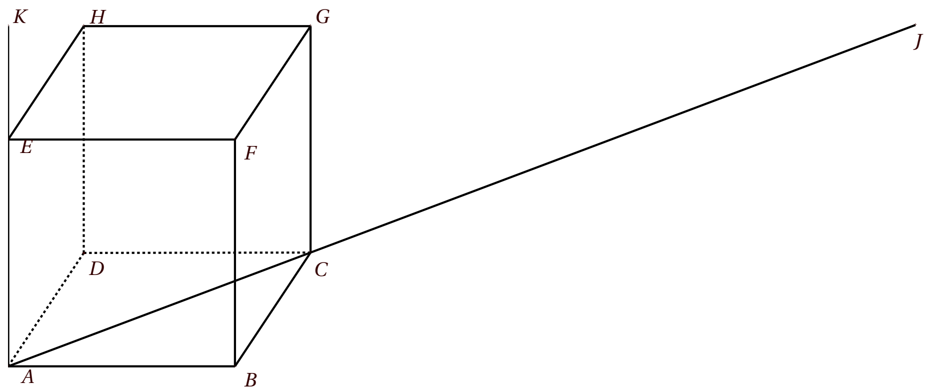
N ← 0
U ← 1
Tant que U ≥ 10^{-4}
  U ← U − ln(1 + U)
  N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N

b.

En programmant l'algorithme, on trouve $n = 4$

Exercice 2 **8 points**

Soit ABCDEFGH un cube .
On considère les points J et K définis par $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AE}$



1. **a.** Exprimer en justifiant $\overrightarrow{JK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = -3\overrightarrow{AC} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

b. Exprimer en justifiant $\overrightarrow{JG}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CG} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

c. En déduire que les points J , G et K sont alignés .

$\overrightarrow{JK} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{JG}$ donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires et les points J , G et K alignés .

2. **a.** Déterminer les coordonnées de J , G et K dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$

G(1 ;1 ;1) par construction du cube

$\overrightarrow{AC}(1;1;0)$

Soit J(x ;y ;z)

Alors : $x = 3; y = 3; z = 0$

Donc J(3 ;3 ;0) .

De même , $\overrightarrow{AK}(0;0;\frac{3}{2})$ et donc $K(0;0;\frac{3}{2})$

b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JG}$

$\overrightarrow{JK}(-3;-3;\frac{3}{2})$

$\overrightarrow{JG}(-2;-2;1)$

c. En déduire que G appartient à la droite (JK)

$\overrightarrow{JK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JG}$ donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont colinéaires et G appartient bien à la droite (JK)