DS 4 Terminale 8 décembre 2020

Spécialité Mathématiques

EXERCICE **10 points**

Partie A

1. Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \ln\left(\dfrac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{3}{1} = 3$ et finalement

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 3$.

Ce résultat montre que géométriquement la droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

2. **a.** f est la composée de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{u'}{u}$.

Avec $u(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$, on a $u'(x) = \dfrac{3(x+1)-1\times(3x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Donc $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \dfrac{2}{(3x+1)(x+1)}$.

b. $f'(x)$ quotient de nombres supérieurs à zéro est supérieure à zéro, donc f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty]$ de $f(0) = \ln\frac{1}{1} = 0$ à $\ln 3$.

Partie B

1. *Initialisation* : $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\dfrac{9+1}{3+1}\right) = \ln\frac{10}{4} = \ln\frac{5}{2} \approx 0,92$.

On a bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Par croissance (démontrée en **A. 2.**) de la fonction f, on a :

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right)$.

Or $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 0,51 > 0,5$.

On a donc l'encadrement $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, il est vrai au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. Le résultat précédent montre que le suite (u_n) est décroissante et minorée par $\dfrac{1}{2}$: elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à $\dfrac{1}{2}$, donc positive.

Partie C

1. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $[x_0\ ;\ +\infty[$, la fonction g décroit de $g\left(x_0\right) \approx 0,088 > 0$ à $-\infty$.
Elle est continue sur cet intervalle car dérivable, donc d'après le principe des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [x_0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Comme $x_0 > 0$, $\alpha > 0$.

2.

a.

$x \leftarrow 0,22$
Tant que $g(x) > 0$ faire
$\quad x \leftarrow x + 0,01$
Fin de Tant que

b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).