DS 5 Terminale 11 janvier 2021

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

1. **a.** A(1 ;0 ;0) , C(0 ;1 ;0) , H(0 ;0 ;1) , E(1 ;0 ;1) et F(1 ;1 ;1)

b. I est sur (AFH) par énoncé .

$\overrightarrow{EI}\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{AF}(0;1;1))$

$\overrightarrow{AH}(-1;0;1))$

Donc : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AF}=0$ et $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

On a donc (EI) orthogonale à deux droites du plan (AFH) donc orthogonale à ce plan.

c. La distance du point E au plan (AFH) est égale à $EI=\frac{1}{3}\times\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

d. La droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) si et seulement si le produit scalaire de $\overrightarrow{HI}$ et de $\overrightarrow{AF}$ est nul,

or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}-1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{HI}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{-1}{3}\end{pmatrix}$, on fait le produit scalaire on trouve $\frac{1}{3}+\frac{-1}{3}=0$ donc

La droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).

Le point I est dans le plan du triangle AFH et la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF) donc (HI) est l'une des hauteurs du triangle AFH, pour prouver que I est l'orthocentre du triangle AFH prouvons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (HF), on fait le produit scalaire de $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ on trouve $\frac{-1}{3}+\frac{1}{3}=0$;

I est l'orthocentre du triangle AFH et comme ce triangle est équilatéral de côté de longueur $\sqrt{2}$, le point I est point de rencontre de « toutes les droites »du triangle AFH

2. **a.** $V=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

b. $V=\frac{1}{3}\times aire(AFH)\times EI$ donc $EI=\frac{\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 2 **10 points**

1. **a.** De $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b. On sait que $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$, donc $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$.

2. $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

On a donc $f'(x) > 0 \iff \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle). On peut donc en déduire que f est croissante sur $\left]\mathrm{e}^{-1} ;\ +\infty\right[$.
De même $f'(x) < 0 \iff x < \mathrm{e}^{-1}$ et $f'(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$.
On a $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1} \ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) - 1 = -\mathrm{e}^{-1} - 1$. On a donc le tableau de variations de la fonction f sur $]0 ;\ +\infty[$ suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Sur $\left]0 ;\ \mathrm{e}^{-1}\right[$, $f(x) \leqslant -1 < 0$. l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1} ;\ +\infty\right[$, la fonction f est continue car dérivable et strictement monotone croissante : il y a donc une bijection de $\left[\mathrm{e}^{-1} ;\ +\infty\right[$ sur $\left[-\mathrm{e}^{-1} - 1 ;\ +\infty\right[$.
Conclusion : il existe un réel unique α de l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1} ;\ +\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne successivement : $1,7 < \alpha < 1,8$, puis $1,76 < \alpha < 1,77$.

4. La question précédente montre que :
   - sur $]0 ;\ \alpha[$, $f(x) < 0$;
   - $f(\alpha) = 0$;
   - sur $]\alpha ;\ +\infty[$, $f(x) > 0$.

5. On a $f(\alpha) = 0 \iff \alpha \ln \alpha - 1 = 0 \iff \alpha \ln \alpha = 1 \iff \ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ (car $\alpha \neq 0$).

6. $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ donc f est convexe