DS 5 Terminale 12 janvier 2021

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Partie A

1. $\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DF} \iff \overrightarrow{DK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{DF}$

Comme D(0 ; 0 ; 0) et F(1 ; 1 ; 1), l'égalité précédente donne :

$x_K = \dfrac{2}{3}(1) = \dfrac{2}{3}$, $y_K = \dfrac{2}{3}(1) = \dfrac{2}{3}$, $z_K = \dfrac{2}{3}(1) = \dfrac{2}{3}$.

Donc $K\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

2. E(1 ; 0 ; 1) donc $\overrightarrow{EK}\left(-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} ; -\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{DF}(1 ; 1 ; 1)$.

Donc $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DF} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$.

Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. On a $EK^2 = \|\overrightarrow{EK}\|^2 = \overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EK} = \dfrac{1}{9} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{6}{9} \Rightarrow EK = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie B

1. La base EMF du tétraèdre EMFD est incluse dans la face supérieure du cube EFGH qui est perpendiculaire à l'arête [DH] qui est donc une hauteur du tétraèdre relative à la base EMF.

L'aire de la base est l'aire d'un triangle de base 1 et de hauteur [EH] dont la longueur est aussi 1. On a donc :

$\mathscr{A}(\text{E}M\text{H}) = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

D'où le volume cherché : $\mathscr{V}(\text{E}M\text{FD}) = \dfrac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

2. Par définition de K , K est sur la droite (FD) donc dans le plan (MFD)

On a montré que (EK) et (DF) étaient orthogonales .

$\overrightarrow{DM}(0; \dfrac{1}{2}; 1)$ donc $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$ et (EK) orthogonale à (DM)

On a donc (EK) orthogonale au plan (MFD)

Donc le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (MFD).

3. La distance de E au plan (MFD) est donc EK et par A3) , elle est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

4. $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \times Aire(MFD) \times EK$ donc Aire(MFD) $= \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

EXERCICE 2 **10 points**

1. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\dfrac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$, d'où par somme de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. f somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :

   $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$.

   Chacun des termes est positif sur $]0~;~+\infty[$, donc la dérivée est positive sur cet intervalle, donc la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini.

3. On a de façon évidente $f(1) = \ln 1 + 1 - \dfrac{1}{1} = 0$. La fonction étant croissante sur $]0~;~+\infty[$, on a donc :
   - $f(x) < 0$ sur $]0~;~1[$;
   - $f(1) = 0$;
   - $f(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$.

4. g somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

   $g'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = f(x)$.

   D'après la question 3, $f(x) > 0$ sur $]1~;~+\infty[$, donc g est croissante sur cet intervalle et décroissante sur $]0\,;1]$

5. On a $g(1) = 1 \times 0 - 0 = 0$ et $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \ln\mathrm{e} = \mathrm{e} - 1 \approx 1,7$.

   D'autre part $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0,63$, donc $0 < 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}} < \mathrm{e} - 1$.

   La fonction g est dérivable donc continue sur $[1~;~\mathrm{e}]$: il existe donc un unique réel $\alpha \in [0;~\mathrm{e}]$ tel que $g(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

6. La calculatrice donne : $g(1,9) - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx -0,05$ et $g(2,0) - 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0,06$, donc :

   $1,9 < \alpha < 2,0$.