DS 6 Terminale 15 mars 2021

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **12 points**

1. Soit f dérivable, strictement positive sur $[0~;~+\infty[$ et vérifiant
$f'(t) = -\dfrac{1}{20}f(t)[3-\ln\left(f(t)\right)]$ (1). La fonction f étant strictement positive, la fonction $g = \ln f$ est bien définie sur $[0~;~+\infty[$ et $g' = \dfrac{f'}{f} \iff f' = f \times g'$. Mais alors l'équation différentielle (1) s'écrit $fg' = -\dfrac{1}{20}f[3-\ln f] \iff$
$g' = -\dfrac{1}{20}[3-g]$, car $f \neq 0$.
Inversement si la fonction $g = \ln f$ vérifie l'équation différentielle
$g' = -\dfrac{1}{20}[3-g]$ (2), alors puisque $g' = \dfrac{f'}{f}$ existe comme dérivée de la fonction composée de f avec la fonction ln sur $[0~;~+\infty[$, l'équation (2) s'écrit :
$\dfrac{f'}{f} = \dfrac{1}{20}\ln f - \dfrac{3}{20} \iff f' = \dfrac{1}{20}f\ln f - f\dfrac{3}{20} = -\dfrac{1}{20}f[3-\ln f]$.
On a donc bien montré l'équivalence.
2. Les solutions de l'équation $z' = -\dfrac{1}{20}z$ sont les fonctions $t \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$.
D'autre part une solution particulière constante de l'équation $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$ est le nombre $-\dfrac{-\frac{3}{20}}{\frac{1}{20}} = 3$.
Finalement les solutions de l'équation $z' = \dfrac{1}{20}z - \dfrac{3}{20}$ sont les fonctions
$t \longmapsto g(t) = 3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
3. D'après la question 1, les fonctions solutions de (E) sont les fonctions f telles que $g = \ln f \iff f = \exp(\mathrm{g})$.
Conclusion finale : les solutions de l'équation (E) sont toutes les fonctions f telles que :
$$f(t) = \exp\left(3 + C\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$
4. Soit $f(t) = \exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$.
   a. De $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = +\infty$, il résulte que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} = -\infty$ et enfin que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0_+$.
   b. On a $f'(t) = -\dfrac{3}{20}\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\exp\left(3 - 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right)$ et comme les exponentielles sont strictement positives, f' est du signe de $-\dfrac{3}{20} < 0$. La fonction f est décroissante sur $[0~;~+\infty[$ de 1 (millier) à 0.

c. $f(t) < 0{,}02 \iff \exp\left(3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}\right) < 0{,}02$ soit d'après la croissance de la fonction logarithme népérien $3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < \ln 0{,}02 \iff 3-3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} < -\ln 50 \iff 3\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > 3+\ln 50 \iff \mathrm{e}^{\frac{t}{20}} > \dfrac{3+\ln 50}{3} \iff \dfrac{t}{20} > \ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right) \iff$

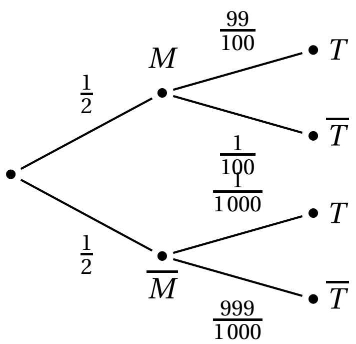
$t > 20\times\ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right)$.

L'ensemble solution est donc $S = \left]20\ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right) ~;~ +\infty\right[$.

On a : 0,02 millier correspond à 20 individus. Comme $20\times\ln\left(\dfrac{3+\ln 50}{3}\right) \approx 16{,}6$, la population sera inférieure à 20 individus à partir de la dix-septième année.

Partie B

1. On dresse un arbre pondéré :



On a $p(M) = \dfrac{1}{2}$; $p_M(T) = \dfrac{99}{100}$ $\quad p_{\overline{M}}(T) = \dfrac{1}{1000}$ (d'après l'énoncé)

2. On a $p(T) = p(M\cap T) + p\left(\overline{M}\cap T\right) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{99}{100} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1000} = \dfrac{991}{2000}$.

3. On a $p_T M = \dfrac{p(M\cap T}{p(T)} = \dfrac{\frac{99}{200}}{\frac{991}{2000}} = \dfrac{990}{991}$. Comme $\dfrac{990}{991} \approx 0{,}998\,99 < 0{,}999$, on en déduit que le test n'est pas fiable.

EXERCICE 2 **8 points**

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

1. Considérons par exemple les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-4\\-1\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}5\\5\\-5\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires. Les trois points distincts A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.

2. $\mathrm{A}\in\mathscr{P} \iff 2\times 1-2+(-3)+3 = 0$: Vrai.
$\mathrm{B}\in\mathscr{P} \iff 2\times(-3)-1+4+3 = 0$: Vrai.
$\mathrm{C}\in\mathscr{P} \iff 2\times 2-6+(-1)+3 = 0$: Vrai.
L'équation du plan (ABC) est bien :

$$M(x~;~y~;~z)\in(\mathrm{ABC}) \iff 2x-y+z+3 = 0.$$

3. I$(-5~;~9~;~4)$. On a vu à la question de cours que les coordonnées d'un vecteur normal au plan (ABC) est le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$. En traduisant l'égalité vectorielle
$\overrightarrow{\mathrm{I}M} = \alpha\overrightarrow{u}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{l c l}x-(-5) &=& 2\alpha\\ y-9 &=& -\alpha\\ z-4 &=& \alpha\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c r}x &=& -5+2\alpha\\ y &=& 9-\alpha\\ z &=& 4+\alpha\end{array}\right. \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

4. Les coordonnées du point J, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC) vérifient le système précédent et l'équation du plan (ABC). On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x &=& -5+2\alpha\\ y &=& 9-\alpha\\ z &=& 4+\alpha\\ 2x-y+z+3 &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 2(-5+2\alpha)-(9-\alpha)+4+\alpha+3=0$$

$\iff 6\alpha - 12 = 0 \iff \alpha = 2$.

Les coordonnées du point J sont donc $(-1~;~7~;~6)$.

5. La distance du point I au plan (ABC) est IJ puisque $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).
Or $\mathrm{IJ}^2 = (-1+5)^2 + 7-9)^2 + (6-4)^2 = 16+4+4 = 24$. Donc IJ$= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

On peut vérifier que $d(\mathrm{I},~\mathscr{P}) = \dfrac{|2\times(-5)-9+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$.