DS 6 Terminale 16 mars 2021

Spécialité Mathématiques

EXERCICE 1 **10 points**

Partie A

1. En posant $X = \dfrac{x}{2}$, on a $f(X) = (40X + 10)\mathrm{e}^{-X} = 40\dfrac{X}{\mathrm{e}^X} + \dfrac{10}{\mathrm{e}^X}$. La limite de ces deux termes en plus l'infini est nulle :

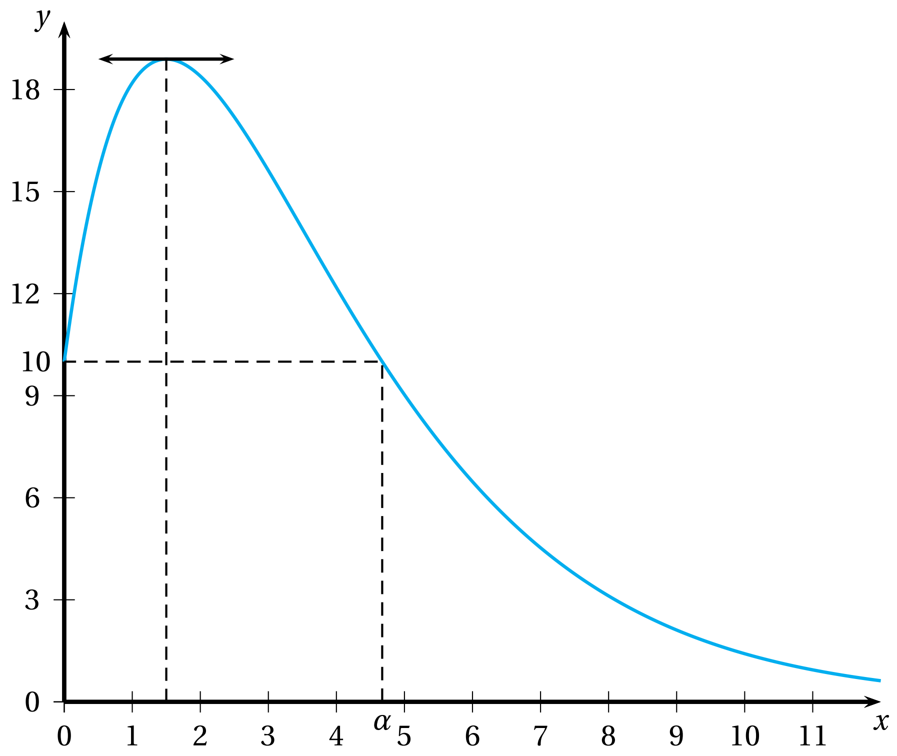
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

2. $f'(x) = (20 - 10x - 5)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = (15 - 10x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ qui est du signe de $(15 - 10x)$ car $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} > 0$. Cette dérivée s'annule en $\dfrac{3}{2}$. D'où le tableau de variations :

x	0		$3/2$		α		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$			
f	10	$\nearrow$	$40\mathrm{e}^{-3/4}$	$\searrow$	10	$\searrow$	0

3. Sur $]0~;~3/2]$, $f(x) > 10$, donc l'équation $f(x) = 10$ n'a pas de solution ; sur l'intervalle $]3/2~;~+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable, monotone décroissante de $40\mathrm{e}^{-3/4} \approx 18,9$ à 0. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]3/2~;~+\infty[$ tel que $f(x) = 10$. La calculatrice donne $\alpha \approx 4,673$.

4.



Partie B

1. On a effectivement $f(t) + \dfrac{1}{2}f'(t) = (15 - 10t)\text{e}^{-\frac{1}{2}t} + (10t + 5)\text{e}^{-\frac{1}{2}t} = 20\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Donc f est une solution de (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Par définition on a $g'(t) + \dfrac{1}{2}g(t) = 20\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$ et $g(0) = 10$. On vient de voir que $f(t) + \dfrac{1}{2}f'(t) = 20\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$ d'où par différence de ces deux équations : $g' - f' + \dfrac{g}{2} - \dfrac{f}{2} = 0 \iff (g - f)' + \dfrac{1}{2}(g - f) = 0$.

Conclusion : la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle : $(\text{E}')\ y' + \dfrac{1}{2}y = 0$.

b. Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions $t \longmapsto K\text{e}^{-t/2}$.

c. La fonction $(g - f)$ est l'une de ces solutions. Or $(g - f)(0) = g(0) - f(0) = K = 10 - 10 = 0$. La fonction $g - f$ est donc la fonction nulle.

Conclusion : l'équation différentielle (E) a une solution unique vérifiant $y'(0) = 10$, c'est la fonction f de la **partie A**.

EXERCICE 2 **10 points**

1. Un vecteur normal au plan $\mathcal{R}$ est le vecteur $\overrightarrow{r}\,(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$. Or $\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n} = -2+2+0 = 0$. Ces vecteurs étant orthogonaux, les plans sont perpendiculaires.

2. Équation du plan $\mathcal{P}$. Son équation est de la forme $-2x+y+5z+d=0$ et $\text{B}\in\mathcal{P} \iff -2-2+5+d=0 \iff d=-1$. Une équation de $\mathcal{P}$ est donc $-2x+y+5z-1=0$.

   Les points communs aux deux plans vérifient les deux équations. On résout donc : $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y\quad -7 & = & =0\\ -2x+y+5z-1 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 7\\ -2x+y & = & -5z+1\end{array}\right. \implies 5x = 10z+5 \iff x = 2z+1$ et en reportant dans l'une des des équations du plan,

   $y=-z+3$.

   Les deux plans étant perpendiculaires, leur intersection est bien une droite Δ définie par les équations $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2z+1\\ y & = & -z+3\\ z & = & z\end{array}\right.$ ou en remplaçant z par t :

   $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t+1\\ y & = & -1t+3\\ z & = & 1t+0\end{array}\right.$. Ceci est l'équation d'une droite ayant pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$

   et l'on vérifie aisément que pour $t=-1$, elle contient le point $\text{C}(-1\ ;\ 4\ ;\ -1)$.

   a. Soit A' le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{R}$ tel que A'(x ;y ;z) .

   Alors : $\overrightarrow{AA'}(k;2k;0)$ et $\overrightarrow{AA'}(x-5;y+2;z+1)$ donc $A'(5+k;-2+2k;-1)$

   De plus A' est dans le plan donc : $5+k+2(-2+2k)-7=0 \iff k=6/5$

   Donc $\overrightarrow{AA'}(\frac{6}{5};\frac{12}{5};0)$ et $AA' = \dfrac{\sqrt{36+144}}{5} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

   b. Dans le plan contenant A et perpendiculaire aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, le théorème de Pythagore peut s'appliquer et :

   $d^2(\text{A},\ \Delta) = d^2(\text{A},\ \mathcal{P}) + d^2(\text{A},\ \mathcal{R}) = \dfrac{270}{25}+\dfrac{180}{25} = \dfrac{450}{25} = 18.$

   Conclusion : $d(\text{A},\ \Delta) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

3. **a.** $\text{A}M_t^2 = (-4+2t)^2+(5-t)^2+(t+1)^2 = 6t^2-24t+42 = 6\left(t^2-4t+7\right)$.

   Le trinôme t^2-4t+7 a pour discriminant $\Delta=-40$. Il ne s'annule donc pas et est positif (coefficient de t^2 positif) quel que soit t. On peut donc calculer $\text{A}M_t = \sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)} = \varphi(t)$.

   On pouvait également écrire : $t^2-4t+7 = (t-2)^2+3$ somme de deux carrés qui est positive, et permet de prévoir le minimum de la question suivante.

   b. $\varphi'(t) = \dfrac{12t-24}{2\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}} = \dfrac{6(t-2)}{\sqrt{6\left(t^2-4t+7\right)}}$ qui est du signe de $t-2$. La fonction φ est donc décroissante sur $[0\,;\,2]$, puis croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$. Elle a donc un minimum en $t=2$ qui est égal à $\varphi(2) = \sqrt{6(4-8+7)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

   c. On reconnaît que M_t est un point de la droite Δ (question **1. b.**) et on a vu à la question **1. d.** que la plus courte distance de A à Δ était égale à $3\sqrt{2}$. On pouvait donc sans calcul prévoir ce résultat.