

Aide pour l'élaboration des questions du Grand Oral

Dans le paragraphe I, vous pourrez choisir vers quelle piste vous souhaitez de préférence vous orienter.

Le paragraphe II vous donne deux exemples de plan de travail sur des thèmes précis.

Le paragraphe III propose une liste non exhaustive de questions possibles en lien avec d'autres spécialités.

I) Pistes de réflexion mathématique pour travailler le Grand Oral :

(Catherine HUET, IA-IPR de Mathématiques de l'académie de Versailles)

Voici différentes pistes vers lesquelles vous pouvez orienter vos recherches :

Piste 1 : Montrer son intérêt pour un point du programme

Piste 2 : Expliciter les obstacles didactiques rencontrés et la façon dont on a levé ces obstacles

Piste 3 : Donner les grandes étapes d'une démonstration

Piste 4 : Raconter un point de l'Histoire des Mathématiques sur une notion donnée pour mieux réfléchir sur les enjeux de demain

Piste 5 : Réflexion sur une utilisation des Mathématiques en Physique-Chimie ou en SVT ou travail avec une autre spécialité

Piste 1 : Montrer son intérêt pour un point du programme

Thème P1-1 : Explicitation de la méthode d'Euler pour une équation de type $y' = f$

Thème P1-2 : Les différents champs d'intervention de l'intégrale

Thème P1-3 : Description d'une expérience

Thème P1-4 : Méthode de résolution à l'aide du tableur et de Python

Thème P1-5 : Réflexions sur les probabilités

Thème P1-6 : Femmes et Mathématiques

Thème P1-7 : Travail ou recherche sur l'infini

Thème P1-8 : Les asymptotes (horizontales, verticales voire obliques)

Thème P1-9 : L'utilisation des suites dans les domaines économiques ou des sciences physiques ou biologiques.

Thème P1-10 : Fiabilité des sondages

Thème P1-11 : Exemples d'utilisation des barycentres en mathématiques (et éventuellement en physique)

Thème P1-12 : Bilan sur les différentes manières de prouver l'orthogonalité

Piste 2 : Expliciter les obstacles didactiques rencontrés et la façon dont on a levé ces obstacles

Faire le point sur un obstacle que vous avez identifié comme tel et sur les outils pour surmonter cet obstacle.

Voici des obstacles fréquents rencontrés chez les élèves du cycle terminale ou les sources de difficultés :

- comprendre la différence entre une hypothèse de récurrence et la propriété dont on veut démontrer la véracité pour tout entier naturel
- comprendre l'outil « intégrale »
- comprendre les fonctions logarithme et exponentielle qui ne s'expriment pas grâce aux fonctions usuelles
- division par zéro, place du zéro dans l'histoire des mathématiques
- premières rencontres avec l'infini (adjectif puis symbole)

Piste 3 : Donner les grandes étapes d'une démonstration

Thème P3-1 : Démonstration par récurrence

Thème P3-2 : Donner des exemples (avec preuve) de propositions vraies et de propositions fausses.

Piste 4 : Raconter un point de l'Histoire des Mathématiques sur une notion donnée pour mieux réfléchir sur les enjeux de demain

Thème P4-1 : La notion de fonction au cours des siècles

Thème P4-2 : Les différentes notations pour la dérivée

Thème P4-3 : Différents modèles d'évolution

Thème P4-4 : Histoire des probabilités

Thème P4-5 : Histoire du zéro

Thème P4-6 : Histoire de l'infini

Thème P4-7 : Le nombre π d'hier à aujourd'hui

Thème P4-8 : Intégrale de Riemann

Thème P4-9 : Quelques constantes célèbres : $\sqrt{2}$, π , γ , $\ln 2$, e .

Thème P4-10 : Apparition des logarithmes, Napier, Briggs

Piste 5 : Réflexion sur une utilisation des Mathématiques en Physique-Chimie ou en SVT ou travail avec une autre spécialité

Thème P5-1 : Mathématiques et Physique : Primitives et équations différentielles

Thème P5-2 : Mathématiques et Sciences de la Vie et de la Terre

Thème P5-3 : Mathématiques et chimie

Thème P5-4 : De l'actualité : mathématiques et épidémies, le modèle SIR

Thème P5-5 : Mathématiques et architecture

Thème P5-6 : Mathématiques et Arts

Thème P5-7 : Approfondissement et Histoire

II) Présentation de deux thèmes :

1) Thème : les courbes d'indifférence (mathématiques - SES)

Enjeu de la question :

Les goûts et préférences du consommateur peuvent être représentés par des courbes d'indifférence.

Elles permettent de représenter les préférences d'un consommateur qui doit comparer différents lots (ou paniers ou combinaisons) de biens.

Mots-clés :

Théorie du consommateur/ taux marginal de substitution/ contrainte budgétaire/optimum

Notions mathématiques sous-jacentes :

Construction de courbes : tracer des courbes d'indifférence

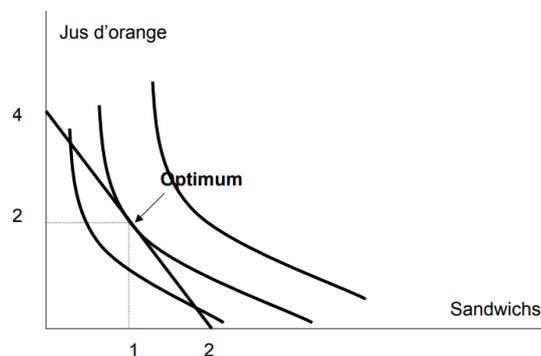
Décroissance et convexité des courbes d'indifférence

Dérivée : le taux marginal de substitution (TMS) correspond à la pente de la courbe d'indifférence

Tangente : la droite de budget est la tangente à une des courbes d'indifférence (permet de trouver l'optimum)

Support possible pour le jury :

Représenter graphiquement les courbes d'indifférence, la droite de budget et l'optimum



Apport personnel possible :

Etudier un exemple de situation de marché entre deux biens et l'étudier mathématiquement (déterminer l'optimum après avoir tracé les courbes d'indifférence)

Questions d'approfondissement possible par le jury :

Calculer une dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables

Différentes méthodes pour prouver qu'une fonction est convexe ?

Différentes fonctions d'utilité ? (Fonction d'utilité Cobb-Douglas, Fonction d'utilité Leontief, Fonction d'utilité inéaire ,...

Poursuite d'études – orientation professionnelle :

Les spécialistes de microéconomie trouveront des débouchés dans les métiers de la finance et de la gestion d'entreprise ou de la régulation. Les diplômés pourront espérer occuper des responsabilités de haut niveau dans les services économiques et les directions financières des grandes entreprises industrielles et des services (EDF, GDF, France Télécom, SNCF, Air France, Renault), les organismes financiers, les cabinets d'études et les cabinets juridiques, les administrations nationales et les autorités de régulation des marchés.

Sitographie :

<http://www.jybaudot.fr/Microeco/exindif.html>

<http://www.vcharite.univ-mrs.fr/pp/thoron/cours/Micro11.pdf>

https://www.economics.li/graphiques/downloads/consumer-choice_f.pdf

<http://ressources.aunege.fr/nuxeo/site/esupversions/ebcf8c7b-4457-4d69-8baf-6451070644d0/co/Conclusion.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=V4uV4dMkcEw&list=PLZXRh2PdMioErbw mPrAfUGkhKK7KZm1KQ&index=10>

<https://www.youtube.com/watch?v=DcmOGBjllzk>

<https://www.youtube.com/watch?v=tNG8yjtI vA>

2) Thème : Evolution d'une population (mathématiques - SVT)

Enjeu du thème:

Etudier et anticiper l'évolution démographique d'une population est un enjeu important aussi bien d'un point de vue écologique que politique.

Mots-clés :

Modèle de Malthus, modèle de Verhulst, modèle de Volterra

Notions mathématiques sous-jacentes :

Fonction exponentielle

Equations différentielles du premier ordre

Support possible pour le jury :

* Loi de Malthus :

Si l'on suppose que pour une petite durée dt , la variation dP de P est proportionnelle à dt et à P , on a alors : $\frac{dP}{dt} = kP$

* Equation logistique de Verhulst :

Le mathématicien belge Verhulst propose, vers 1840, le modèle suivant d'évolution d'une population :

$$\frac{dP}{dt} = aP(m - P) \quad (a \text{ et } m \text{ sont des constantes positives.})$$

* Modèle de Volterra :

Modèle proie-prédateur. Système :
$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - bx_n y_n \\ y_{n+1} = cy_n - dx_n y_n \end{cases}$$

Apport personnel possible :

Modéliser l'évolution de plusieurs populations à l'aide d'un tableur/ Géogébra/ Python, puis analyser/comparer la courbe réelle et la courbe théorique

Questions d'approfondissement possible par le jury :

Etude des suites définies par une relation de récurrence

Différentes propriétés de la fonction exponentielle

Différentes équations différentielles que vous connaissez

Biographie des mathématiciens cités dans la présentation

Poursuite d'études – orientation professionnelle :

La [dynamique des populations](#) a été traditionnellement un domaine de prédilection en biomathématiques.

La biomathématique sous-entend l'association de deux sciences : la [biologie](#) et les [mathématiques](#). De façon précise les biomathématiques sont constituées par l'ensemble des méthodes et techniques mathématiques, numériques et informatiques qui permettent d'étudier et de [modéliser](#) les phénomènes et processus biologiques.

Les biomathématiques ont des débouchés tant pratiques que théoriques dans de nombreux domaines comme la [biologie des populations](#), la [physiologie](#), la [génomique](#), la [pharmacologie](#), etc.

Sitographie :

<https://interstices.info/annabelle-ballesta-a-la-decouverte-des-biomathematiques/> (parcours d'une doctorante en biomathématique)
https://www.cph.t.polytechnique.fr/sites/default/files/livre_0.pdf
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/lycee2010/voie_generale/Stage_spe_TS/annexe12_modele_proie_predateur_de_volterra.pdf
<https://www.codingame.com/playgrounds/17176/recueil-dexercices-pour-apprendre-python-au-lycee/systeme-proie-predateur>

III) Liste de questions possibles en lien avec une autre spécialité :

En lien avec la SVT

1. Comment les Mathématiques permettent-elles de modéliser l'évolution d'une population ?

(Les modèles d'évolution discrets ou continus, Malthus, Verhulst, Volterra, limites et avantages des modèles, ...)

2. Un équilibre stable entre prédateurs et proies est-il possible ?

(Equation différentielle de Lotka-Volterra, ...)

3. Comment modéliser l'évolution de la fréquence des allèles dans une population ? (simulations analogique et numérique, ...)

4. Comment trouver la frontière entre une pêche au rendement maximal et une surpêche ? (modèle de Schaefer, ...)
5. Comment les Mathématiques peuvent-elles aider à modéliser le refroidissement d'un corps? (modèle de Newton discret et continu, ...)
6. Comment interpréter les résultats d'un test diagnostique en médecine ?
(Faux positifs, intervalle de fluctuation, ...)
7. Comment étudier l'évolution au cours du temps d'une population de noyaux radioactifs ? Quelles en sont les applications ?
8. Comment étudie-t-on l'élimination d'un traceur radioactif lors d'une scintigraphie ? (principe de la scintigraphie, loi de décroissance radioactive, comparaison et choix des isotopes, ...)
9. Dans la nature, où trouve-t-on des spirales logarithmiques ?
(Coordonnées polaires, équation polaire, ...)
10. Comment modéliser la croissance spiralée de certains végétaux ?
(Suite de Fibonacci, ...)
11. En quoi une modélisation statistique favorise-t-elle la compréhension des variations climatiques passées ?
12. Quel intérêt y a-t-il à utiliser des échelles logarithmiques ou semi-logarithmiques ?

En lien avec la Physique-Chimie

1. Comment les Mathématiques permettent-elles de modéliser un phénomène périodique ? (étude d'exemples, ...)
2. Comment modéliser un oscillateur à l'aide d'une équation différentielle ?
3. Comment effectuer un positionnement GPS ? (systèmes d'équations, ...)
4. Pourquoi trouve-t-on des formes paraboliques dans plusieurs applications technologiques ? (foyer, loi de Descartes, ...)
5. Quelle est la caustique par réflexion de la courbe de la fonction exponentielle? (la chaînette lorsque les rayons sont parallèles à (Oy) ,)

6. Comment les vecteurs permettent-ils une description du mouvement ?

(Vecteur déplacement, vecteur vitesse instantanée, ...)

7. Comment les logarithmes permettent-ils d'étudier le niveau d'intensité sonore d'un signal ?

8. Peut-on modéliser des phénomènes de radioactivité avec des suites ?

9. Comment décrire la variation de vitesse d'une réaction chimique en fonction de la température ? (loi empirique d'Arrhenius, ...)

En lien avec les Arts

1. Comment les Mathématiques interviennent-elles dans la conception de motifs publicitaires ? (Raccordement de courbes, notion de tangente, pavages)

2. Quel est le lien entre les notes de musique et la longueur de la corde d'un instrument ?

3. Qu'est-ce que la musique dodécaphonique ?

En lien avec la SES

1. Comment modéliser les préférences de consommateurs ?

(fonctions convexes et courbes d'indifférence, ...)

2. Comment les Mathématiques interviennent-elles dans la mesure des inégalités de revenus ? (répartition de données par déciles, courbe de Lorenz, indice de Gini, ...)

3. Avec quels outils mathématiques peut-on mesurer l'accélération ou le ralentissement d'un phénomène économique ?

(fonctions modélisant « la vie d'un produit » : fonction logistique, fonction de Gompertz, limites et avantages des modèles ...)

4. Comment les Mathématiques permettent-elles de construire et d'interpréter des sondages ?

(loi des grands nombres, intervalle de confiance, choix des échantillons, étude critique de sondages, ...)

5. Quel est le lien entre les intérêts composés et le nombre e ?

6. Comment différencier et calculer le taux d'intérêt nominal et le taux d'intérêt réel ?
7. En quoi l'étude des premiers chiffres significatifs d'une table de nombres permet-elle de détecter d'éventuelles fraudes ? (loi de Benford, ...)

En lien avec la NSI

1. Comment modéliser le codage RVB des couleurs ?
(le cube de couleurs, ses sections planes, système TSV, ...)
2. Comment coder la luminosité et les niveaux de gris en informatique ?
(fonctions associées à certains traitements d'images, ...)
3. Comment construire des suites générant des nombres (pseudo) aléatoires ?
(carré médian, Fibonacci, congruence linéaire ...)
4. Pourquoi un développeur travaille soit avec des nombres entiers, soit avec une précision donnée ?
5. Quelles sources d'erreurs de calcul sont fréquentes en informatique ?
(suite de Muller, polynôme de Rump, ...)
6. Comment « mesurer » la performance d'un algorithme ?
(estimation de temps ou d'espace, comparaison de complexité d'algorithmes, ...)
7. Comment le théorème d'Euler-Fermat intervient-il dans le système RSA ?
(fonction indicatrice d'Euler, ...)
8. En quoi la notion de récurrence intervient-elle dans l'élaboration et le fonctionnement d'un programme récursif ?

En lien avec l'histoire ou non

1. Une somme infinie de nombres peut-elle être égale à un nombre fini ?
(Limites, suites, ...)

2. Un solide de longueur infinie peut-il avoir un volume fini ?
(Trompette de Gabriel, ...)
3. Comment Giuseppe Peano a-t-il construit axiomatiquement l'ensemble des entiers naturels ?
4. Comment Georg Cantor a-t-il prouvé qu'il existe autant de nombres rationnels que de nombres entiers naturels ?
5. Combien existe-t-il de nombres premiers de la forme an^2+bn+c ?
6. Dans quelle mesure la méthode des indivisibles de Cavalieri est-elle un précurseur du calcul intégral ?
7. Comment approcher une intégrale ?
(Méthode des rectangles, trapèzes, tangentes, Simpson, comparaisons ...)
8. Quelle courbe, tournant autour d'un axe, décrit une surface d'aire minimale ? (Caténoïde et chaînette, représentation paramétrique, aire, application en architecture, ...)
9. Le nombre Pi peut-il être limite d'une suite de nombres ?
(Exemples, comparaison de vitesse de convergence, ...)
10. Le nombre Pi peut-il être limite de rapports géométriques ?
11. Comment la méthode de Buffon permet-elle d'approcher le nombre Pi ?
Quelle est sa précision ?
12. Quelle a été la première fois (connue) qu'une sinusoïde a été tracée ?
(Compagne d'une cycloïde, ...)
13. Comment les fonctions trigonométriques permettent-elles de construire les solutions d'une équation différentielle du second ordre ?
14. Quelles situations concrètes peuvent être modélisées par une équation différentielle du type $y''+w^2y=0$, avec w non nul ?
15. Quelles sont les différences entre les diagrammes de Venn, d'Euler et de Carroll ? Leurs avantages et leurs inconvénients ?
16. Pourquoi la théorie des probabilités a-t-elle tardé à faire son apparition ?
17. Comment les Mathématiques permettent-elles de modéliser les jeux de hasard ? (Comparaison de différents jeux, ...)

18. Comment les compagnies aériennes peuvent-elles contrôler le surbooking ?
(probabilités, statistiques, ...)

19. Quels liens et différences peut-on établir entre probabilités et statistiques ?
(loi des grands nombres, ...)

20. Pourquoi et comment ont été créés les logarithmes ?
(besoins en calcul, aire sous hyperbole, principe des tables logarithmiques, ...)

21. Quelles applications pour les fonctions logarithmes ?
(calcul de PH, échelle de Richter, niveau de bruit, ...)

22. Existe-t-il des fonctions continues, dérivables en aucun point ?
(Fonction de Weierstrass, fonction du blanc-manger, ...)