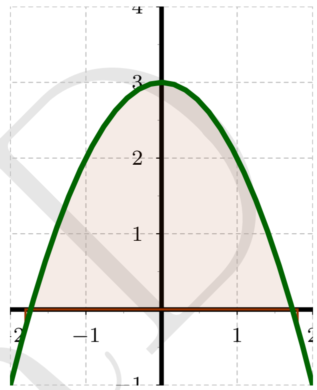
1 Intégrale d'une fonction continue sur [a ;b]

1.1 Fonction continue positive

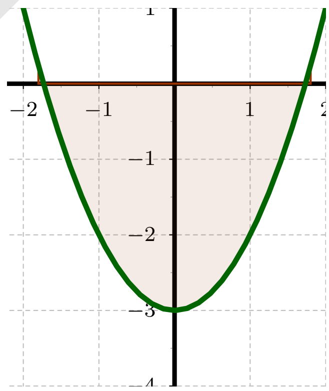
Définition.
Soit f une fonction continue positive définie sur [a ;b] . Soit C sa courbe représentative . On note D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses , la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On appelle intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$, l'aire du domaine D .



Remarque.
"t" est une variable muette ; on pourrait écrire $f(u)du$, $f(x)dx$ ...

1.2 Fonction continue négative

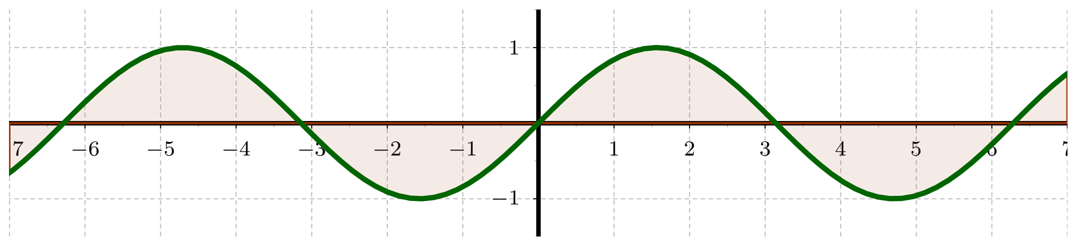
Définition.
Soit f une fonction continue négative définie sur [a ;b] . Soit C sa courbe représentative . On note D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses , la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On appelle intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$,l'opposée de l'aire du domaine D .



Remarque.
Une aire est toujours positive mais une intégrale peut être négative .

1.3 Cas quelconque

Définition.
Soit f une fonction continue définie sur [a ;b] . Soit C sa courbe représentative . On note D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses , la courbe C lorsqu'elle est située au dessus de l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note D' e domaine du plan délimité par l'axe des abscisses , la courbe C lorsqu'elle est située en dessous de l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. L'intégrale de f entre a et b est égale à ; aire(D) - aire(D')



DEBORD

Propriété.
Soient f et g deux fonctions continues sur [a ;b] telles que $f(x) \leq g(x)$, pour tout x de [a ;b] . Alors , l'aire comprise entre les courbes de ces fonctions entre a et b est égale à : $\int_a^b g(t)\ \mathrm{dt} - \int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}$

1.4 Propriétés

Ces propriétés sont admises

Propriété.
Soit f une fonction continue sur [a ;b] , alors : $\int_a^a f(t)\ \mathrm{dt} = 0$

Propriété.
Soit f une fonction continue sur [a ;b] , alors : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} = -\int_b^a f(t)\ \mathrm{dt}$

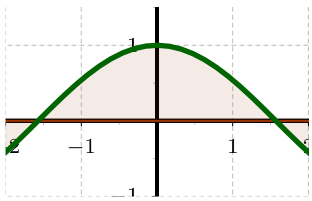
Théorème. (Linéarité)
Soient f et g deux fonctions continues sur [a ;b] . Soient α et β des réels . Alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\ \mathrm{dt} = \alpha \int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} + \beta \int_a^b g(t)\ \mathrm{dt}$$

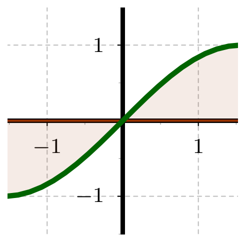
Théorème. (Chasles)
Soit f fonction continue sur [a ;c] . Soit b un réel . Alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} + \int_b^c f(t)\ \mathrm{dt} = \int_a^c f(t)\ \mathrm{dt}$$

Exemple.
Si f est paire : $\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{dt} = 2\int_0^a f(t)\ \mathrm{dt}$



Exemple.
Si f est une fonction impaire , alors $\int_{-a}^a f(t)\ \mathrm{dt} = 0$



Théorème. (Conservation de l'ordre)
Soient f et g deux fonctions continues sur [a ;b] . Si pour tout x de [a ;b] , on a :$f(x) \leq g(x)$, alors :

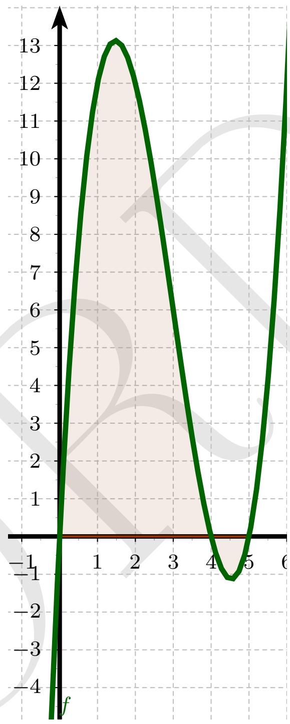
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} \leq \int_a^b g(t)\ \mathrm{dt}$$

DEBORD

Théorème. (Conservation du signe)
Soit f une fonction continue sur [a ;b] . Si pour tout x de [a ;b] , on a :$f(x) \geq 0$, alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$$

> ⚠ *Attention*
> La réciproque est fausse : une intégrale peut être positive sans que la fonction le soit sur tout l'intervalle



Définition. (Valeur moyenne d'une fonction)
Soit f une fonction continue sur [a ;b] . On appelle valeur moyenne de f l'expression : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$

Propriété. (inégalité de la moyenne)
Soit f une fonction continue sur [a ;b] telle que pour tout x de [a ;b] , il existe m et M avec :
$m \leq f(x) \leq M$, alors : $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq M(b-a)$

2 Calculs d'intégrales

2.1 En utilisant des primitives

Propriété.
Toute fonction continue admet des primitives

Propriété.
Soit f une fonction continue sur [a ;b] et soit F une de ses primitives . Alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

DEBORD

Exemple.
Calculer $\int_{-2}^{3} \frac{2t-3}{t^2-3t+5}\ \mathrm{d}t$

Propriété.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un réel de I . Alors la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

2.2 Intégration par parties

Propriété.
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur [a ;b] . Alors :
$$\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$$

Exemple.
Calculer $\int_0^3 te^t\ \mathrm{d}t$

DEBORD