

1 Ensembles

1.1 Vocabulaire et premières définitions

Définition.

Un ensemble est une collection d'éléments distincts . S'il y a un nombre fini d'éléments , on dit que l'ensemble est fini . Soit x un élément d'un ensemble E , on note $x \in E$. Si un élément y n'appartient pas à un ensemble E , on note $y \notin E$

Remarque.

- $E = \{a; b; c\}$ est un ensemble de 3 éléments .
- L'ordre ne compte pas $\{a; b\} = \{b; a\}$
- \mathbb{R} , \mathbb{Z} ... sont des ensembles avec une infinité d'éléments .

Définition.

Soit E un ensemble . On appelle partie de E un sous-ensemble de E constitué d'éléments de E . Si A est une partie de E , alors A est incluse dans E et on note $A \subset E$.

Remarque.

- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E
- Une partie ayant un unique élément s'appelle un singleton . Une partie ayant deux éléments s'appelle une paire .

Exemple.

Donner toutes les parties de $E = \{a, b, c, d\}$

Définition.

Soit E un ensemble . On appelle p -uplet de E une collection ordonnée de p éléments de E . Ces éléments ne sont pas obligatoirement distincts .

Remarque.

Un 2-uplet s'appelle couple et un 3-uplet s'appelle triplet .



Astuce

On connaît bien les 2-uplets puisque les coordonnées d'un point dans le plan sont un 2-uplet .

Définition.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

- $x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$
- $x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$
- A et B sont disjoints si et seulement $A \cap B = \emptyset$
- Soient A et B deux parties disjointes d'un ensemble E de cardinal respectif n et p alors $\text{Card}(A \cup B) = n + p$

Propriété.

Soit E un ensemble de cardinal n . Alors E admet 2^n parties .

1.2 Produit cartésien**Définition.**

Soient E et F deux ensembles . $(x; y) \in E \times F \iff x \in E \text{ et } y \in F$

Exemple.

Donner tous les couples possibles de $E \times F$ si $E = \{a; b\}$ et $F = \{c; d; e\}$

Propriété.

Soit E un ensemble de cardinal n et soit F un ensemble de cardinal p alors $\text{Card}(E \times F) = np$

2 Combinatoire**2.1 Factorielle****Définition.**

On appelle factorielle de n , et on note $n!$ l'expression $1 \times 2 \times 3 \dots \times n$

Remarque.

- Par convention , $0! = 1$
- $(n + 1)! = n! \times (n + 1)$

Définition.

On appelle combinaison de p éléments parmi n et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties de p éléments choisies dans un ensemble de n éléments

Propriété.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriété.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- Relation de Pascal $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Propriété.

Triangle de Pascal

E/P	0	1	2	3	
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Remarque.

$$\binom{4}{2} = 6$$

2.2 Dénombrement

Propriété.

Soit E un ensemble à n éléments . Le nombre de p-uplets de E est n^p

Propriété.

Il y a $p!$ p-uplets constitués par les mêmes éléments . Ce sont des permutations les uns des autres

Exemple.

Ecrire tous les triplets permutations de (a,b,c).

Propriété.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$