

1 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1.1 Définitions

Propriété. (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire et soit t un réel . Alors :

$$p(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Remarque.

- $|X - E(X)| \geq t \iff -t \leq X - E(X) \leq t \iff E(X) - t \leq X \leq E(X) + t$ et donc $[E(X) - t; E(X) + t]$ est un intervalle de fluctuation
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est une inégalité de concentration

Exemple.

Le nombre de pièces fabriquées en une journée par une entreprise est modélisé par une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité d'espérance 50 et de variance 25 . Donner une majoration de la probabilité que la production dépasse 75 pièces

$$p(X \geq 75) = p(X - 50 \geq 25) \leq p(|X - 50| \geq 25) \leq \frac{25}{25^2} \iff p(X \geq 75) \leq 0,04$$

Propriété. (Cas particuliers)

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et d'écart-type σ

- $p(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
- $p(|X - E(X)| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4}$
- $p(|X - E(X)| \geq 4\sigma) \leq \frac{1}{16}$

Remarque.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev montre que l'écart entre X et son espérance ne peut pas dépasser un écart de quelques σ car à partir de 4σ , le résultat de la majoration de la probabilité montre qu'on est dans des événements improbables .

2 Loi des grands nombres

Propriété.

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance E et de variance V . Soit t un réel. Alors :

$$p(|M_n - E| \geq t) \leq \frac{V}{nt^2}$$

Remarque.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev donne : $p(|M_n - E(M_n)| \geq t) \leq \frac{V(M_n)}{t^2}$ sachant que $E(M_n) = E$ et $V(M_n) = \frac{V}{n}$

Théorème. (loi des grands nombres)

Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance E et de variance V . Soit t un réel. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(|M_n - E| \geq t) = 0$$

Remarque.

C'est ce résultat qui justifie qu'on peut assimiler des probabilités à des fréquences obtenues dans des échantillons de très grande taille