1 Continuité

1.1 Définitions

Définition.
On dit qu'une fonction f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque.
La courbe d'une fonction continue ne présente aucune coupure sur son domaine de définition

Définition.
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si f est continue pour tout a élément de I

Propriété.
Les fonctions polynômes , racines , puissances , fractions , exponentielles sont continues sur leur domaine de définition

1.2 Théorème du point fixe

Théorème.
Soit f une fonction continue et soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors , si la suite converge vers une limite a , cette limite vérifie $a = f(a)$

Exemple.
Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = 0,5u_n - 5$ et $u_0 = 4$. On admet que (u_n) converge . Déterminer sa limite .

1.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème.
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . Soient deux réels a et b de I . Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) , il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Corollaire.
Soit f une fonction définie , continue et strictement monotone sur un intervalle I . Soient deux réels a et b de I . Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) , il existe un unique réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

Exemple.
Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2$. Dresser le tableau de variations de f puis montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dont on donnera un encadrement à 0,01 près .

2 Dérivation

2.1 Dérivabilité et continuité

Définition.
f est dérivable en a $\iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie

Dans ce cas , $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Propriété.
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty \iff$ la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a

Propriété.
Si une fonction est dérivable en a , alors elle est continue en a

Propriété.
Les fonctions polynômes , racines , fractions , puissances , exponentielles sont dérivables sur leur ensemble de définition ouvert .

Exemple.
Regardons si la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en 0 .

2.2 Dérivées de fonctions composées

Définition.
Soient u et v deux fonctions . On appelle fonction composée de u et v la fonction notée $v \circ u$ définie par $v \circ u(x) = v(u(x))$

Théorème.
Soient u et f deux fonctions dérivables . Alors $(f(u(x))' = u'(x) \times f'(u(x))$

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x	1	u	u'
x^n	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$

Exemple.
Dériver : $f(x) = \sqrt{3x-5}$

Exemple.
Dériver : $f(x) = e^{3x^2-5x+7}$

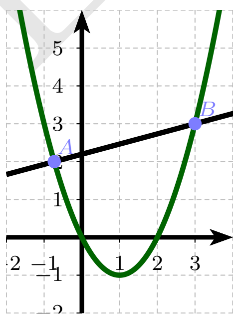
3 Convexité

3.1 Sécantes et tangentes

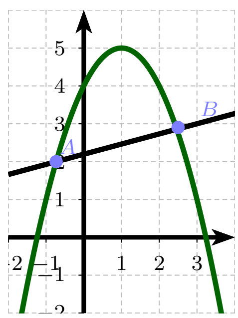
Définition.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- On dit que f est une fonction convexe si la courbe de f est en dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection
- On dit que f est une fonction concave si la courbe de f est au dessus de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection

Courbe d'une fonction convexe



Courbe d'une fonction concave



Exemple.
Les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$

Propriété.
f convexe $\iff$ -f concave

Propriété.
Soit f une fonction deux fois dérivable . Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction f est convexe
2. La courbe de f est au dessus de ses tangentes
3. La fonction f' est croissante
4. La fonction f" est positive

3.2 Inégalités

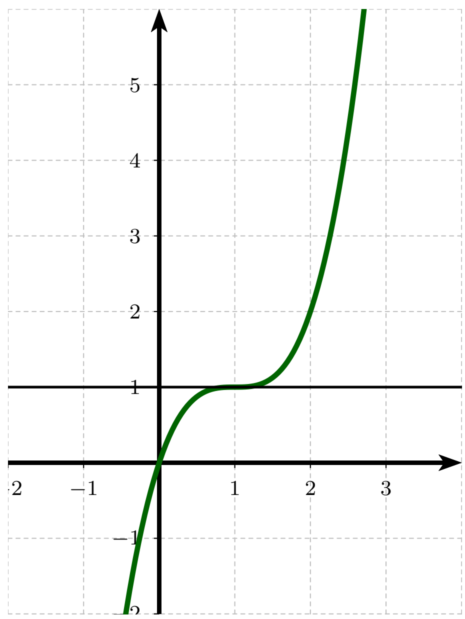
Propriété.
Soit f une fonction deux fois dérivables et soit t un réel de l'intervalle [0 ;1] . Alors :

- Si f est convexe alors $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
- Si f est concave alors $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$

Exemple.
Soit $f(x) = e^x$ et soit $t = \dfrac{1}{3}$ alors $e^{\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y} \leq \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{2}{3}e^y$

3.3 Point d'inflexion

Définition.
Soit une fonction deux fois dérivable . Soit A un point de la courbe de f . On dit que A est un point d'inflexion si la courbe traverse sa tangente au point A



Propriété.
En un point d'inflexion , f" change de signe .