

1 Indépendance

1.1 Rappel sur les probabilités conditionnelles

Propriété.

- On appelle probabilité de B sachant A et on note $p_A(B)$ la probabilité conditionnelle entre A et B
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
- $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$

Exemple.

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées. La chaîne A produit 40% des composants et la chaîne B produit le reste. Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20% des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5%. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. On note : A l'évènement "le composant provient de la chaîne A " ; B l'évènement " le composant provient de la chaîne B " ; S l'évènement " le composant est sans défaut" ;

1. Faire un arbre de probabilités
2. Donner $p(A)$
3. Donner $p_A(S)$
4. Calculer $p(A \cap S)$
5. Calculer $p(S)$

1.2 Événements indépendants

Définition.

Soient deux événements A et B alors , A et B sont indépendants si et seulement si $p_B(A) = p(A)$

Propriété.

A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Exemple.

Le plateau de roulette est composée de 18 secteurs rouges , 18 secteurs noirs et un secteur vert , tous de la même taille . On lance quatre fois successivement la bille et on note la couleur obtenue .

1. Déterminer la probabilité d'obtenir l'issue , dans cet ordre , R-V-R-N
2. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement deux fois la face rouge .

2 Schéma de Bernoulli

2.1 Loi de Bernoulli

Définition.

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues (succès ou échec)

Exemple.

On lance un dé à six faces et on note A l'événement "obtenir le six " . On est bien dans une épreuve de Bernoulli , le succès étant obtenir le six et l'échec ne pas obtenir six .

Propriété.

Soit une épreuve de Bernoulli telle que la probabilité du succès est p . Soit X la variable aléatoire égale à 1 en cas de succès et égale à 0 en cas d'échec . La loi de probabilité de X , appelée loi de Bernoulli de paramètre p et notée par $\mathfrak{B}(p)$ est donnée par

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	1-p	p

Exemple.

On lance un dé à six faces et on note A l'événement "obtenir le six " . Donner la loi de Bernoulli correspondante .

2.2 Schéma de Bernoulli

Définition.

On appelle schéma de Bernoulli la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques .

Exemple.

On lance un dé à six faces et on note A l'événement "obtenir le six " . On répète trois fois cette expérience . Réaliser l'arbre pondéré de ce schéma .

3 Loi binomiale

Définition.

Soit un schéma de Bernoulli de n expériences de paramètre p . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès . La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètres n et p et notée $\mathcal{B}(n; p)$

Propriété.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Alors : $p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$

Exemple.

On lance 5 fois un dé . On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on obtient le 6 . Déterminer $p(X = 2)$

Propriété.

Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors :

- Espérance de X : $E(X) = np$
- Variance de X : $V(X) = np(1 - p)$