1 Produit scalaire et bases orthonormées

1.1 Généralités

Définition.
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, l'expression $\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times cos\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$

Propriété.

- Symétrie : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$
- Bilinéarité : $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$
- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- Polarisation : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$
- Polarisation : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2\right)$

1.2 Bases orthonormées

Propriété.
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Définition.

- Une base $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthogonale si et seulement si les vecteurs qui la composent sont orthogonaux deux à deux
- Une base $\left(\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$ est orthonormale (ou orthonormée) si et seulement la base est orthogonale et $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1$

Propriété.
On travaille dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$. Soient $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$ deux vecteurs . Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

Propriété.
On travaille dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$. Soit $\overrightarrow{u}(x;y;z)$. Alors $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

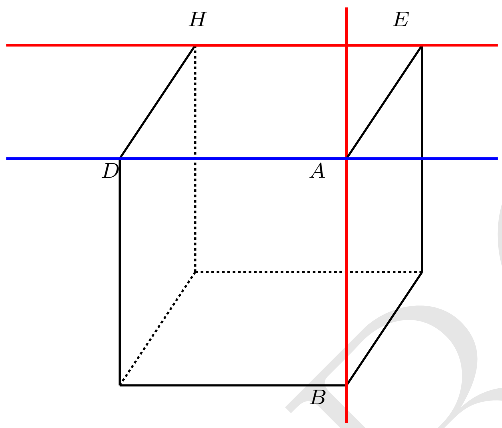
Propriété.
On travaille dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j};\overrightarrow{k}\right)$. Soient $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$. Alors $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

2 Projection orthogonale

2.1 Orthogonalité dans l'espace

Définition.
Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si on peut trouver un plan dans lequel deux parallèles respectives de ces droites sont perpendiculaires

Exemple.
(AD) et (AB) perpendiculaires
(HE) et (DA) parallèles
Donc (HE) et (AB)orthogonales



Attention
On utilise perpendiculaire dans le plan ; on utilise orthogonal dans tous les cas .

Propriété.
Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux .

Définition.
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites du plan .

Propriété.
Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan .

Définition.
On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan orthogonal à (AB) qui passe par le milieu de [AB]

Propriété.
Le plan médiateur de [AB] est l'ensemble des points M qui vérifient $AM = BM$

2.2 Distance d'un point à une droite , à un plan

Définition.
Soit M un point de l'espace . Soit d une droite . On appelle H le projeté orthogonal de M sur d l'intersection de d et du plan passant par M orthogonal à d .

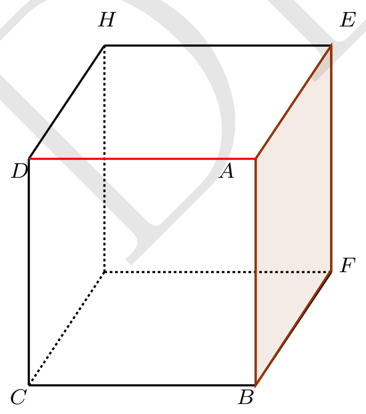
Propriété.
Soit M un point de l'espace et soit H son projeté orthogonal sur une droite d . Alors la distance de M à d est égale à la distance MH . Autrement dit , H est le point de d le plus proche de M .

Définition.
Soit M un point de l'espace . Soit P un plan . On appelle H le projeté orthogonal de M sur P l'intersection de P et de la droite passant par M orthogonale à P .

Propriété.
Soit M un point de l'espace et soit H son projeté orthogonal sur un plan P . Alors la distance de M à P est égale à la distance MH . Autrement dit , H est le point de P le plus proche de M .

Exemple.

A est le projeté orthogonal de D sur (AEF) (La droite (AD) est orthogonale à (AEB) et passe par A)



C est le projeté orthogonal de B sur (DC) (le plan (BCF) contient B et est orthogonal à (DC))