# 1 Variables aléatoires $X+Y$ et $aX$

## 1.1 Définitions

**Définition.**
Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $\{x_1;x_2;...;x_n)$ et soit Y une variable aléatoire qui prend les valeurs $\{y_1;y_2;...;y_m)$ . Alors la variable aléatoire $X+Y$ prend toutes les valeurs $x_i+y_j$ avec $1 \leq x_i \leq n$ et $1 \leq y_i \leq m$

**Définition.**
$p(X+Y=a)$ est la somme de toutes les $p(X=x_i) \cap (Y=y_j)$ avec $x_i+y_j=a$

*Exemple.*
Une urne A contient quatre boules numérotées respectivement 2 ; 2 ; 3 ; 3 et une urne B contient trois boules numérotées respectivement 1 ; 2 ; 3 . On tire une boule dans chaque urne . Déterminer les valeurs de la variable aléatoire S égale à la somme des numéros obtenus . Déterminer $p(S=3)$

**Définition.**
Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs $\{x_1;x_2;...;x_n)$ . Soit a un réel . Alors $aX$ est la variable aléatoire qui prend toutes les valeurs $ax_i, 1 \leq i \leq n$

**Définition.**
$p(aX=b)$ est la somme de toutes les $p(X=x_i)$ avec $ax_i=b$

## 1.2 Espérance

**Définition.**
Soit X une variable aléatoire telle que $p(X=x_i)=p_i$ . Alors $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

**Propriété.**
L'espérance est linéaire c'est à dire que : $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ et $E(aX)=aE(X)$ pour a réel

DEBORD

*Exemple.*
Soient X et Y deux variables aléatoires dont voici les lois de probabilité :

| $x_i$ | 8 | 12 | 24 |
|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | 0,5 | 0,25 | 0,25 |

Et

| $y_i$ | 5 | 7 | 15 |
|---|---|---|---|
| $p(Y = y_i)$ | 0,1 | 0,7 | 0,2 |

Déterminer $E(X + Y)$

# 2 Variables aléatoires indépendantes

## 2.1 Indépendance

**Définition.**
Soient deux évènements indépendants . Les variables aléatoires qui donnent respectivement les résultats de ces deux évènements sont indépendantes .

**Propriété.**
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes .
Alors $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$

## 2.2 Variance

**Définition.**
Soit X une variable aléatoire telle que $p(X = x_i) = p_i$ . Alors : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$

**Propriété.**
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes . Alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(aX) = a^2V(X)$

*Exemple.*
Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y . La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous et on sait que $E(Y) = 2,6$ et $V(Y) = 1,44$

| $x_i$ | 0 | 2 |
|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | 0,3 | 0,7 |

Déterminer $V(X + Y)$

DEBORD

*Remarque.*
Ces propriétés permettent de démontrer les formules d'espérance et de variance de la loi binomiale .

# 3 Applications aux échantillons

## 3.1 Echantillons

**Définition.**
Une liste de variables aléatoires indépendantes et identiques suivant toutes la même loi de probabilité $(X_1; X_2; ...; X_n)$ est appelé échantillon de taille n associé à cette loi .

*Exemple.*
On prélève au hasard un paquet de chips à la sortie de sa chaine de production . Soit X la variable aléatoire égale à la masse d'un paquet de chips . $(X_1; X_2; X_3)$ est un échantillon de taille 3 associé à la loi suivie par X .

**Définition.**
Soit $(X_1; X_2; ...; X_n)$ un échantillon de taille n associé à une loi de probabilité .

- On note $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la variable aléatoire somme de cet échantillon
- On note $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne de cet échantillon .

## 3.2 Formules

**Propriété.**

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$

*Exemple.*
Soit T la variable aléatoire égale au temps d'attente d'un client appelant un service après-vente . On sait que $E(T) = 18$ . On note X la variable aléatoire égale au temps d'attente moyen pour un échantillon de 100 clients . Déterminer E(X)

DEBORD