1 Théorème fondamental

A retenir

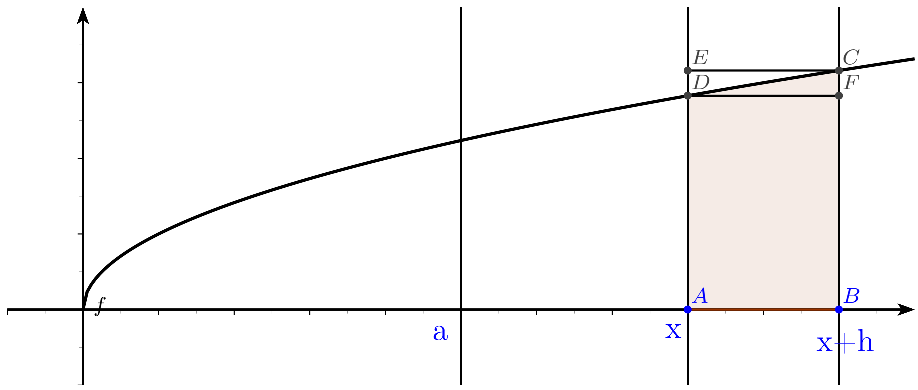
Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ alors $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Le principe

On se place dans le cas où f est croissante . On va d'abord démontrer que F est dérivable en un point . Pour cela , on travaille avec l'aire sous la courbe qu'on va encadrer par des rectangles . Puis , on généralise et on calcule F(a)

La démonstration

- La situation : f est une fonction croissante positive sur $[a;b]$. on choisit x réel tel que $x > a$ et h réel strictement positif . On fait un schéma suffisamment clair et précis . On hachure l'aire sous la courbe comprise entre x et $x+h$. On trace les rectangles en dessous et au dessus . On pose des notations pour que ce soit clair . On obtient ceci :



- Montrons que F est dérivable en x quelconque :
  F est dérivable en x si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$ est un nombre fini .
  $F(x+h) - F(x) = Aire(rose)$.
  Or l'aire rose est encadrée par l'aire de deux rectangles : **ABFD et ABCE .**
  $(x+h-x)f(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq (x+h-x)f(x+h)$
  $\iff\ hf(x) \leq F(x+h) - F(x) \leq hf(x+h)$
  Or $h > 0$ donc $f(x) \leq \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq f(x+h)$
  $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$
  Donc par le théorème des gendarmes , $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)\ \forall x$. Donc pour tout x , F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)\ \forall x$.
  F est donc bien une primitive de f .

- Calculons $F(a)$
  $F(a) = \int_a^a f(t)\ \mathbf{d}t = 0$
- Montrons l'unicité :
  Soit G une autre primitive de f qui s'annule en a .
  Alors : $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = 0\ \forall x$.
  Donc $F(x) - G(x)$**est une constante** . Or $F(a) - G(a) = 0$ donc $F(x) - G(x) = 0\ \forall x$ **et** $F(x) = G(x)\ \forall x$

2 Calcul de $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ en utilisant les primitives

A retenir

Soit f une fonction continue sur [a;b] et soit F une de ses primitives . Alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$

Le principe

On va utiliser $G(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ primitive de f et une autre primitive F .

La démonstration

Soit F une primitive de f .

On sait que $G(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est également une primitive de f et qu'elle s'annule en a .
Par les propriétés des primitives , $F(x) = G(x) + k$ avec k réel .
Or G s'annule en a donc $F(a) = G(a) + k = k$
On a donc : $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$

3 Intégration par parties

A retenir

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur [a;b] . Alors :
$\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$

Le principe

On applique les formules de dérivées

La démonstration

Soient u et v deux fonctions dérivables : $(u(t)v(t))' = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ donc

$\int_a^b (u(t)v(t))'\ \mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b (u(t)v'(t))\ \mathrm{d}t$

uv est une primitive de $(uv)'$ donc $\int_a^b (u(t)v(t))'\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b$ et on a donc :

$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b (u(t)v'(t))\ \mathrm{d}t$

D'où: $\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$