A retenir

Relation de Pascal $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Le principe

Par le calcul , on utilise les définitions des combinaisons et les propriétés des factorielles .
$(n+1)! = n! \times (n+1)$
$\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

La démonstration

$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} + \dfrac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$

Or $(p+1)! = p! \times (p+1)$ et $(n-p)! = (n-p-1)! \times (n-p)$
On doit donc multiplier le dénominateur de la première fraction par (p+1) et celui de la deuxième par (n-p) pour les mettre au même dénominateur et faire l'addition

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} = \frac{n! \times (p+1) + n! \times (n-p)}{(p+1)!(n-p)!}$$

$$= \frac{n!(p+1+n-p)}{n!(n+1-p-1)!} = \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n+1-(p+1))!} = \frac{(n+1)!}{n+1-(p+1)!} = \binom{n+1}{p+1}$$

A retenir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Le principe

On calcule le nombre de parties d'un ensemble à n éléments de deux façons différentes

La démonstration

Soit E un ensemble à n éléments .

Démontrons qu'il y a 2^n parties

On va démontrer cette affirmation par récurrence :

- Initialisation : Il y a une seule partie avec aucun élément , c'est l'ensemble vide . Et $2^0 = 1$ donc l'affirmation est vraie pour $n = 0$
- Hérédité . Supposons qu'un ensemble à n éléments possède 2^n parties . Démontrons qu'un ensemble à $n+1$ éléments possède 2^{n+1} parties .
  Soit E un ensemble à n éléments . Soit $F = E \cup \{x\}$ alors F admet $n+1$ éléments .
  Les parties de F peuvent être rangées en deux catégories : celles qui possèdent x et celles qui ne possèdent pas x .
  Celles qui ne possèdent pas x sont les parties de E et par hypothèse de récurrence , il y en a 2^n
  Celles qui possèdent x , sont celles de E à qui on a adjoint x . Il y en a donc autant que de parties de E c'est à dire 2^n
  F a donc $2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ parties
- Conclusion : un ensemble à n éléments a 2^n parties

Démontrons qu'un ensemble à n éléments a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p}$ parties

Par définition , le nombre de parties à p éléments choisis dans l'ensemble E est $\binom{n}{p}$

Dans un ensemble à n éléments , on peut fabriquer des parties qui ont 0 , 1 , 2 ... jusqu'à n éléments .

Il y en a $\binom{n}{0}$ à 0 élément

Il y en a $\binom{n}{1}$ à 1 élément

Il y en a $\binom{n}{2}$ à 2 éléments

...

Il y en a $\binom{n}{n}$ à n éléments

Donc au total : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p}$

conclusion

Puisque le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n d'une part et de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p}$ d'autre part , on a bien l'égalité entre ces deux expressions , c'est à dire : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$