



A retenir

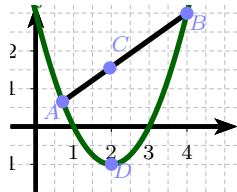
Soit f une fonction dérivable deux fois et soit t un réel de l'intervalle $[0;1]$. Si f est convexe alors $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$

Le principe

On va tracer une sécante à la courbe

Puisque f est convexe , on sait que la sécante est au dessus de la courbe . On va donc prendre un point de la courbe et un point de la sécante ayant la même abscisse et comparer leurs ordonnées

La démonstration



Soient A et B deux points de la courbe .
On choisit $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$.

Déterminons une équation de (AB)

Soit $M(x;y)$ un point de (AB) alors \vec{AM} et \vec{AB} sont colinéaires .

$$\vec{AM}(x - a; y - f(a)) \text{ et } \vec{AB}(b - a; f(b) - f(a))$$

La colinéarité donne : $(x - a)(f(b) - f(a)) - (b - a)(y - f(a)) = 0$

$$\iff (x - a)(f(b) - f(a)) + (b - a)f(a) = (b - a)y \iff y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

$$(AB) : y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Déterminons les coordonnées de C et D

Soit C le point de la droite (AB) d'abscisse $ta + (1 - t)b$. Déterminons son ordonnée .

$$y_C = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x_C + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + (1 - t)b) + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = \frac{(f(b) - f(a))(t(a - b) + bf(b) - bf(a) + bf(a) - af(b))}{b - a} = \frac{-t(f(b) - f(a))(b - a) + (b - a)f(b)}{b - a} =$$

$$tf(a) + (1 - t)f(b)$$

Donc : $y_C = tf(a) + (1 - t)f(b)$

Soit D le point d'abscisse $ta + (1 - t)b$ placé sur la courbe . Alors $y_D = f(ta + (1 - t)b)$

Conclusion

La fonction f est convexe donc toute sécante est au dessus de la courbe donc le point C est au dessus du point D et donc $y_D \leq y_C$ d'où : $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$



A retenir

Soit f une fonction dérivable deux fois . Si f'' est positive alors la courbe de f est au dessus de ses tangentes .

Le principe

On va étudier la position relative de la courbe de f et d'une tangente quelconque .

La démonstration

Supposons que $f''(x) \geq 0$

On sait que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Posons $g(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$ et étudions le signe de g

$$g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

$$g''(x) = f''(x) . \text{ Or } f''(x) \geq 0 \text{ donc } g''(x) \geq 0 .$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g''(x)$	+	+	
$g'(x)$			

On en conclut que g' est croissante . De plus , $g'(a) = 0$ donc on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

Puisque le minimum de g est nul , alors $g(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$ ce qui prouve que la courbe est au-dessus de sa tangente .