



A retenir

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
3. Comportement à l'origine : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Le principe

Pour la première, on va comparer deux fonctions.
 La deuxième découle directement de la première.
 La troisième utilise le nombre dérivé.

Les démonstrations

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	
$f(x)$			

1. On pose $f(x) = e^x - x$. On étudie cette fonction :
 $f'(x) = e^x - 1$ $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$

Par lecture du tableau de variations, on a : $f(x) > 0$, donc $e^x > x$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 donc par le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}}$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$

3. Posons $f(x) = e^x$. Alors, par définition du nombre dérivé :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$$



Attention

Soit f une fonction dérivable en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

A retenir

Le principe

On va d'abord démontrer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ en comparant e^x et $\frac{x^2}{2}$
 Puis, on fait un changement de variable.

La démonstration

Soit $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Etudions cette fonction sur $[0; +\infty[$ puisque nous cherchons la limite en $+\infty$, on peut considérer que x est positif

$f'(x) = e^x - x$. Nous ne pouvons pas directement connaître le signe de f' donc nous dérivons une nouvelle fois.

$$f''(x) = e^x - 1. \text{ Or } f''(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0.$$

On sait donc que sur $[0; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ et que f' est croissante.

Or $f'(0) = 1 > 0$ donc f' est positive sur $[0; +\infty[$ et la fonction f est croissante.

$$\text{Or } f(0) = 1 \text{ donc } f(x) > 0 \text{ et } e^x > \frac{x^2}{2} \iff \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \text{ car } x > 0$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \text{ donc par le théorème de comparaison, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\text{On peut écrire : } \frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(\frac{x}{en}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(\frac{x}{en}\right)^n}{\frac{x^n}{n^n}} \times n^n = \left(\frac{\frac{x}{en}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times n^n$$

$$\text{Par ce qui précède, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$