

1 Existence de la fonction logarithme népérien



A retenir

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à t réel strictement positif, associe x réel tels que $e^x = t$
 $\ln 1 = 0$

Le principe

On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires avec la fonction exponentielle

La démonstration

Par étude de la fonction exponentielle, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

Soit t un réel strictement positif, alors par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel x tel que $e^x = t$. On pose alors $\ln(t) = x$
 On sait que $e^0 = 1$ donc par la construction précédente, $\ln 1 = 0$

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien



A retenir

1. La fonction $f(x) = \ln x$ est continue sur $]0; +\infty[$
2. La fonction $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
3. $a \leq b \iff \ln a \leq \ln b$

Le principe

On utilise simplement les définitions

Les démonstrations

1. La fonction $f(x) = \ln x$ est dérivable donc continue.
2. $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$ **donc f est croissante**
3. Par définition d'une fonction strictement croissante.

3 Formules de la fonction logarithme népérien



A retenir

1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$
4. $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$
5. $\ln(a^n) = n\ln a$ avec n entier naturel non nul .

Le principe

On va utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour la première puis utiliser cette formule pour démontrer les autres .

Les démonstrations

1. On pose : $X = \ln a$ et $Y = \ln b$. Alors : $e^{X+Y} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} e^{\ln b} = ab$ En utilisant le fait que les fonctions sont réciproques : $X + Y = \ln(ab) \iff \ln a + \ln b = \ln(ab)$
2. $\ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b \iff \ln a = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln b \iff \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$
4. $\ln(\sqrt{a}\sqrt{a}) = \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{a}$ **par la première formule**
 $\iff \ln a = 2\ln\sqrt{a}$
5. Par récurrence : l'initialisation est immédiate pour $n = 1$.
 Hérité : **On suppose que pour un n donné , $\ln(a^n) = n\ln a$, alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n a) = \ln(a^n) + \ln a = n\ln a + \ln a = (n + 1)\ln a$**

4 Formule de dérivée



A retenir

La fonction $x \rightarrow \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Le principe

La dérivabilité est admise .

On utilise la réciprocity des fonctions exponentielle et logarithme et la formule de la dérivée de la fonction exponentielle

La démonstration

On admet la dérivabilité . Soit x un réel strictement positif .

$(e^{\ln(x)})' = (\ln x)' e^{\ln x}$ par la formule de la dérivée de l'exponentielle

$$\text{Or } e^{\ln x} = x \text{ donc } (e^{\ln(x)})' = (\ln x)' e^{\ln x} \iff x' = (\ln x)' x \iff 1 = x(\ln x)' \iff (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

5 Limites de la fonction logarithme népérien



A retenir

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Le principe

On utilise les formules de limites de la fonction exponentielle pour la première puis on en déduit la deuxième . La troisième découle du nombre dérivé .

Les démonstrations

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \iff \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\infty . \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

3. On pose $f(x) = \ln(x+1)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ et par la définition du nombre dérivé :
- $$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - 0}{x - 0} = \frac{1}{0+1} \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

6 Croissance comparée



A retenir

$$- \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$$

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

Le principe

On va démontrer la première en utilisant les formules de limite de la fonction exponentielle
La deuxième se démontre par un changement de variable

Les démonstrations

1. Soit x un réel strictement positif . On a : $x \ln x = e^{\ln x} \ln x$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) e^{\ln x} = 0$ d'où : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$

Procédons maintenant à un changement de variable : $x^n \ln x = x^n \frac{\ln(x^n)}{n} = \frac{x^n \ln(x^n)}{n}$.

Par ce qui précède , $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x^n) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$

2. Là encore , on procède par changement de variable : $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{-\ln(\frac{1}{x})}{x^n} = - \left(\frac{1}{x}\right)^n \ln \left(\frac{1}{x}\right)$

Or par 1) , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} X^n \ln X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} - \left(\frac{1}{x}\right)^n \ln \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$