

1 Le raisonnement par récurrence

1.1 La méthode

Il y a trois étapes dans le raisonnement par récurrence :

Initialisation : on vérifie que la propriété à démontrer est vraie au premier rang

Hérédité : on montre que si la propriété est vraie pour un rang donné , alors elle est vraie au rang suivant .

Conclusion : on a démontré que la propriété est vraie pour tout n .

1.2 Exemple

Montrer que $4^n + 2$ est un multiple de 3 pour tout entier naturel n .



On utilise le raisonnement par récurrence uniquement avec des entiers , jamais avec des réels .

Attention

2 Limites de suites

2.1 Premières définitions

Définition.

Soit (u_n) une suite . On dit que (u_n) tend vers L si et seulement si tout intervalle ouvert contenant L contient aussi tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang .

Dans ce cas , on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

Définition.

Soit (u_n) une suite . On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang .

Dans ce cas , on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Définition.

Une suite converge si elle admet une limite finie .

Une suite non convergente est dite divergente



Une suite est donc divergente si elle a une limite infinie ou si elle n'a pas de limite .

Attention

Exemple.

$u_n = (-1)^n$ diverge car elle n'a pas de limite .

2.2 Règles de calculs

Propriété.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$ avec p entier naturel

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \text{ avec } p \text{ entier naturel.}$$

On applique les opérations habituelles pour calculer des limites .



Il y a quatre formes indéterminées :

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad \infty \times 0 \quad +\infty - \infty$$

Attention

Exemple. 1. Déterminer la limite de $u_n = n^2 + n + 5$

2. Déterminer la limite de $u_n = \frac{3}{n^2 + 1}$

3. Déterminer la limite de $u_n = (n + 1)(n^2 - 9)$

2.3 Lever une indétermination

Méthode.

On factorise par le facteur de plus haut degré pour supprimer une forme indéterminée .

Exemple. 1. Déterminer la limite de $u_n = n^2 - n + 8$

2. Déterminer la limite de $u_n = \frac{n^2 + n + 8}{n^3 + 8}$