Corrigé fiche 1

Exercice 1

1) $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$

$$\Delta = 4 - 4(2)(-12) = 100 \; donc \; x' = \frac{-2+10}{4} = 2 \; et \; x'' = \frac{-2-10}{4} = -3$$

$$f(x) = 2(x-2)(x+3)$$

x		-3		2	
f(x)	+	0	-	0	+

2) $f(x) = -4x^2 - 28x + 32 = -4(x^2 + 7x - 8)$

$$\Delta = 49 + 32 = 81 \; donc \; x' = \frac{-7+9}{2} = 1 \; et \; x'' = -8$$

$$f(x) = -4(x-1)(x+8)$$

x		-8		1	
f(x)	-	0	+	0	-

3) $f(x) = -x^2 - x + 20$

$$\Delta = 1 + 80 = 81 \; donc \; x' = \frac{1-9}{-2} = 4 \; et \; x'' = -5$$

$$f(x) = -(x+5)(x-4)$$

x		-5		4	
f(x)	-	0	+	0	-

4) $f(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Puisque $x^2 + 1$ est strictement positif , f(x) est du signe de (x – 1) (x + 1)

x		-1		1	
f(x)	+	0	-	0	+

Exercice 2

$$1)\; u_n = v_n - \frac{3}{13} \; avec \; v_n = \frac{2}{15} v_{n-1} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1} - \frac{3}{13}}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15} v_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15} v_n - \frac{2}{65}}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15}\left(v_n - \frac{15}{65}\right)}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{\frac{2}{15}\left(v_n - \frac{3}{13}\right)}{v_n - \frac{3}{13}} = \frac{2}{15}$$

$$u_0 = 1 \; donc \; u_n = 1\left(\frac{2}{15}\right)^n$$

$$2)\; u_n = 13v_n - 4 \; avec \; v_n = -\frac{3}{10} v_{n-1} + \frac{4}{10} \; et \; v_0 = 1$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{13v_{n+1} - 4}{13v_n - 4} = \frac{13\left(-\frac{3}{10} v_n + \frac{4}{10}\right) - 4}{13v_n - 4} = \frac{\frac{-39}{10} v_n + \frac{12}{10}}{13v_n - 4} = \frac{-\frac{3}{10}(13v_n - 4)}{13v_n - 4} = -\frac{3}{10}$$

$$u_n = 9\left(-\frac{3}{10}\right)^n$$

Exercice 3

Rappel : n est toujours un entier naturel et donc toujours positif

$$1)\ u_{n+1}-u_n=\frac{3}{(n+1)^2}-\frac{3}{n^2}=\frac{3n^2-3(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{-6n-3}{n^2(n+1)^2}<0$$

La suite est donc décroissante

$$2)\ u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)-1}{n+1+4}-\frac{2n-1}{n+4}=\frac{(2n+1)(n+4)}{(n+5)(n+4)}-\frac{(2n-1)(n+5)}{(n+4)(n+5)}$$
$$=\frac{9}{(n+4)(n+5)}>0$$

La suite est donc croissante

$$3)\ u_{n+1}-u_n=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n>0$$

La suite est donc croissante

$$4)\ u_{n+1}-u_n=\frac{1}{1+(n+1)^2}-\frac{1}{1+n^2}=\frac{1+n^2-1-(n+1)^2}{(1+n^2)(1+(n+1)^2)}$$
$$=\frac{-2n-1}{(1+n^2)(1+(n+1)^2)}<0$$

La suite est donc décroissante

$$5)\ u_{n+1}-u_n=\sqrt{3(n+1)+1}-\sqrt{3n+1}=\frac{3n+3+1-3n-1}{\sqrt{3(n+1)+1}+\sqrt{3n+1}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{3n+4}+\sqrt{3n+1}}>0$$

La suite est donc croissante

NB : Quand on doit étudier le signe de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, on multiplie et on divise par l'expression conjuguée c'est-à-dire $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, on a en effet :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Exercice type

1) Initialisation : 1 < 3 donc vrai

Hérédité : supposons $u_n<3$

Alors on a : $u_n-3<0$

Etudions le signe de $u_{n+1}-3=2u_n-3-3=2u_n-6=2(u_n-3)<0$

On a donc : $u_{n+1}<3$

Conclusion : $u_n<3$ pour tout n .

2) Etudions le signe de $u_{n+1}-u_n=2u_n-3-u_n=u_n-3<0$ par 1)

La suite (u_n) est donc décroissante .