Corrigé fiche 10

Exercice 1

a) La dérivée de x est 1 donc la fonction cherchée est f(x) = x
b) f(x) = x² car f '(x) = 2x
c) f(x) = 1/x car f '(x) = -1/x²
d) f(x) = ln x
e) e^{2x}

Exercice 2

a) La dérivée de x² + 1 est 2x donc on a une forme u'/u ; la fonction cherchée est donc f(x) = ln (x² +1)
b) f(x) = x^3
c) f(x) = $(e^x + 1)^2$
d) f(x) = 1/x²

Exercice type 1

1) On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x + 8 = +\infty \; et \; \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \; donc \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x\, e^x = 0 \;(\,cc)\; et \; \lim_{x\to-\infty} 8e^x = 0 \; donc \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

2) On a :

$$f'(x) = e^x + (x+8)e^x = (x+9)e^x$$

Or $e^x > 0$ donc f '(x) dépend du signe de x + 9

x	$-\infty$		-9		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	0	$\searrow$	$-e^{-9}$	$\nearrow$	$+\infty$

3) La fonction f est négative sur $]-\infty; -9[$ par lecture du tableau de variations . Sur $]-9; +\infty[$ la fonction f est continue et strictement croissante . 0 appartient bien à l'intervalle $]-e^{-9}; +\infty[$. Donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans $]-9; +\infty[$ tel que f(a) = 0 .

-8 < a < -7,9

4) On a donc f(x) < 0 si x < a et f(x) > 0 si x > a .
5) Sur [-5 ;0] , la fonction f est positive donc l'aire cherchée est :

$$A = \int_{-5}^{0} (x+8)e^x dx$$

Nous allons calculer cette intégrale en utilisant une intégration par parties :

On pose : $\begin{cases} u = x + 8 \\ v' = e^x \end{cases}$, on obtient alors : $\begin{cases} u' = 1 \\ v = e^x \end{cases}$

$$A = [(x+8)e^x]_{-5}^{0} - \int_{-5}^{0} e^x dx = 8e^8 - 3 - [e^x]_{-5}^{0} = 8 - 3e^{-5} - 1 + e^{-5} = 7 - 2e^{-5} u.a$$

Exercice type 2

1) On pose :

Corrigé fiche 10

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} - ln(1 + x^2) \ alors \ f'(x) = 2x - 2x^3 - \frac{2x}{1 + x^2}$$
$$= \frac{2x + 2x^3 - 2x^3 - 2x^5 - 2x}{1 + x^2} = -\frac{2x^5}{1 + x^2}$$

1 + x² > 0 donc f '(x) est du signe de -2x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f(x)		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc par lecture du tableau de variations , f(x) $\leq$ 0 et donc :

$$x^2 - \frac{x^4}{2} \leq ln(1 + x^2)$$

De même , on pose : g(x) = $ln(1 + x^2) - x^2$

$$g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} - 2x = \frac{-2x^3}{1 + x^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g '(x)		+	0	-	
g(x)		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc g(x) $\leq$ 0 et $ln(1 + x^2) \leq x^2$

2) On a :

$$x^2 - \frac{x^4}{2} \leq ln(1 + x^2) \leq x^2$$

L'intégration conserve l'ordre donc :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 - \frac{x^4}{2} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} ln(1 + x^2) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10}\right]_0^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} ln(1 + x^2) dx \leq \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{320} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} ln(1 + x^2) dx \leq \frac{1}{24}$$

$$\frac{37}{960} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} ln(1 + x^2) dx \leq \frac{1}{24}$$

$$-5 \times \frac{37}{960} \geq -5 \int_0^{\frac{1}{2}} ln(1 + x^2) dx \geq -5 \times \frac{1}{24}$$

$$-\frac{5}{24} \leq -5 \int_0^{\frac{1}{2}} ln(1 + x^2) dx \leq -\frac{37}{192}$$

<u>Exercice type 3</u>

1) On a :

Corrigé fiche 10

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e = e - \sqrt{e}$$

2) On a :

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow e \geq e^{\frac{1}{x}} \geq \sqrt{e} \Leftrightarrow \frac{e}{x^n} \geq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \geq \frac{\sqrt{e}}{x^n} \geq 0$$

3) L'intégration conserve l'ordre donc on peut écrire :

$$0 \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n}\, dx \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq e\left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$$

Donc par le théorème des gendarmes ,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$