Corrigé fiche 3

Exercice 1

1) $x^2+3x-40$: Δ = 9 +160 =169 = 13², x' = 5 et x'' = - 8 d'où la factorisation (x – 5) (x + 8) ; $x^2+3x-40<0$ sur]- 8 ; 5 [
2) $-x^2+2x+48$: Δ = 4 + 192 = 196 = 14², x' = 8 et x'' = - 6 d'où la factorisation - (x – 8) (x + 6) et $-x^2+2x+48>0$ sur] -6 ; 8[
3) $2x^2-4x-100$ = 2 (x² - 2x – 50) : Δ = 4 + 200 = 204 d'où :
   x' = $\dfrac{2+2\sqrt{51}}{2}=1+\sqrt{51}$ et x'' = $1-\sqrt{51}$.
   On obtient la factorisation $2(x-1-\sqrt{51})(x-1+\sqrt{51})$ et
   $2x^2-4x-100<0$ sur $\left]1-\sqrt{51};1+\sqrt{51}\right[$
4) $-x^2+4x-4=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2\leq 0$
5) $3x^2-5x+25$: Δ = 25 – 300 = - 275 < 0 donc pas de racines ni de factorisation ; le polynôme est du signe de 3 donc est positif pour tout x
6) $2x^2+3x+5$: Δ = 9 – 40 = - 31 < 0 donc pas de racines ni de factorisation et le polynôme est toujours positif
7) x^4+2x^2-3 : on pose X = x² et on doit étudier : X² + 2X – 3 ; Δ = 4 + 12 = 16 donc X' = - 3 et X'' = 1 d'où la factorisation : (X – 1) (X + 3) soit (x² - 1) (x² + 3) ou encore (x – 1) (x + 1) (x² + 3) . Et ce polynôme est négatif sur]-1 ; 1[car x² + 3 > 0 et donc x^4+2x^2-3 est du signe de (x – 1) (x + 1)
8) $2x^4-3x^2+7$: on pose X = x² et on étudie : 2X² - 3X + 7 ; Δ = 9 – 56 = - 47 < 0 donc pas de factorisation et le polynôme est du signe de 2 donc positif

Exercice 2

1) On a : g(1) = 1 + 5 – 12 + 6 = 0 donc 1 est solution de g(1) = 0
2) $(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c$
   $$=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

Par identification avec g(x) :
a = 1 , b – a = 5 ; c – b = - 12 et – c = 6 donc a = 1 , c = - 6 , b = 6

$$g(x)=(x-1)(x^2+6x-6)$$

3) Commençons par étudier le signe de x² + 6x – 6 : $\Delta = 36+24=60$ donc les racines sont :$\frac{-6-2\sqrt{15}}{2}=-3-\sqrt{15}$ et $-3+\sqrt{15}$

x	$-\infty$		$-3-\sqrt{15}$		1		$-3+\sqrt{15}$		$+\infty$
x – 1		-		-	0	+		+	
x²+6x-6		+	0	-		-	0	+	
g(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Exercice 3

$$1)\ f'(x)=10x\ ;\ 2)\ f'(x)=\frac{2}{x^2}\ ;\ 3)\ f'(x)=\frac{7}{2\sqrt{x}}$$

$$4) f'(x)=8x-3\ ;\ 5) f'(x)=5-\frac{2}{x^2}\ ;\ 6)\ f'(x)=1-6x\ ;\ 7) f'(x)=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$8) f'(x)=12x-5\ ;\ 9)\ f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\ ;$$

$$10) f'(x) = (2x-1)(x+2) + x^2 - x = 3x^2 + 2x - 2\ ;$$

$$11) f'(x) = 5\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}(5x-4) = -5x + 7$$

$$12) f'(x) = 2x\left(1+\sqrt{x}\right) + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} = 2x + 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} = 2x + \frac{5\sqrt{x}}{2}\ ;$$

Exercice 4

$$1) f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x}+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}+2\right) = -\frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt{x}}{2x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$2) f'(x) = 6(3x+5)\ ;\ 3) f'(x) = 2\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x+\sqrt{x}\right) = 2\left(x + \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 2x + 3\sqrt{x} + 1$$

$$4) f'(x) = 15(5x+3)^2\ ;\ 5) f'(x) = -\frac{3}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\ ;\ 6) f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}\left(2+\sqrt{x}\right)^3\ ;$$

$$7) f'(x) = 2(-3+x^5)(-3x+x^6)$$

$$8) f'(x) = -\frac{1}{5}\left(0{,}5 - \frac{x}{10}\right)\ ;\ 9) f'(x) = 4(2x-3)(x^2-3x+1)^3\ ;\ 10) f'(x) = 6(x+1)^5\ ;$$

$$11) f'(x) = -\frac{6}{x^2}\left(\frac{1}{x}\right)^5 = -\frac{6}{x^7}$$

$$12) f'(x) = 21x^6 + 24x^3 - 10x + 1$$

Exercice type

1) On a :

$$\frac{3x}{4x-5} = \frac{3}{4-\frac{5}{x}}\ donc\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{x\to\frac{5}{4}} f(x) = +\infty$$

2) La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation x = 5/4 et une équation horizontale d'équation y = $\sqrt{\frac{3}{4}}$

3) On doit étudier le signe de f(x) - $\sqrt{\frac{3}{4}}$

$$f(x) - \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3x}{4x-5}} - \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3x}{4x-5}} - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(\sqrt{\frac{3x}{4x-5}} + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)}{\sqrt{\frac{3x}{4x-5}} + \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3x}{4x-5} - \frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3x}{4x-5}} + \sqrt{\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{15}{4(4x-5)\left(\sqrt{\frac{3x}{4x-5}} + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)}$$

Sur $]-\infty; 0]$, 4x – 5 < 0 donc la courbe de f est en dessous de son asymptote horizontale

Sur $\left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$, 4x – 5 > 0 donc la courbe de f est au dessus de son asymptote .

4) On a :

$$f'(x) = \frac{\frac{3(4x-5)-4(3x)}{(4x-5)^2}}{2\sqrt{\frac{3x}{4x-5}}} = \frac{-15}{2(4x-5)^2\sqrt{\frac{3x}{4x-5}}} < 0$$

La fonction f est donc décroissante sur son ensemble de définition

5) Courbe