Corrigé fiche 3

Exercice 1

$$1) f'(x) = 15(3x-1)^4 > 0$$

$$2) f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0;\ 3) f'(x) = \frac{3}{(5-3x)^2} > 0;$$

$$4) f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0\ si\ x < 0\ et\ f'(x) < 0\ si\ x > 0$$

$$5) f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} < 0\ ;$$

$$6) f'(x) = \frac{10x}{(3-5x^2)^2} < 0\ si\ x < 0\ et\ f'(x) > 0\ si\ x > 0$$

$$7) f'(x) = -\frac{3}{x^4} < 0;\ 8) f'(x) = \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0;$$

$$9) f'(x) = -\frac{2x}{(4+x^2)^2} > 0\ si\ x < 0\ et\ f'(x) < 0\ si\ x > 0$$

$$10) f'(x) = \frac{2(4x+1)-4(2x+1)}{(4x+1)^2} = \frac{-2}{(4x+1)^2} < 0;\ 11) f'(x) = \frac{1}{(1+2x)^2} > 0\ ;$$

$$12) f'(x) = \frac{5(x+3)-5x+1}{(x+3)^2} = \frac{16}{(x+3)^2} > 0;$$

Exercice 2

$$1) f'(x) = \frac{3(2-5x)+5(3x-7)}{(2-5x)^2} = \frac{-29}{(2-5x)^2} < 0$$

$$2) f'(x) = \frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2} = -\frac{(2x^2+8)}{(x^2-4)^2} < 0;$$

$$3) f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0\ si\ x > 0\ et\ f'(x) < 0\ si\ x < 0;$$

$$4) f'(x) = \frac{(4x-5)(x-3)-2x^2+5x-3}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-12x+12}{(x-3)^2}$$

Le dénominateur est positif donc f ’(x) est du signe de $2x^2 - 12x + 12 = 2(x^2 - 6x + 6)$

$$\Delta = 36 - 24 = 12$$

$$x' = \frac{6-2\sqrt{3}}{2} = 3-\sqrt{3}\ et\ x'' = 3+\sqrt{3}$$

x		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
f ’(x)	+	0	-	0	+

$$5) f'(x) = \frac{1+\sqrt{x}-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2} > 0\ ;$$

$$6) f'(x) = \frac{x+\sqrt{x}-x-\frac{x}{2\sqrt{x}}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x}}{2\left(x+\sqrt{x}\right)^2} > 0$$

$$7) f'(x) = 2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\left(\frac{x+1-x+3}{(x+1)^2}\right) = \frac{8(x-3)}{(x+1)^3} = \frac{8(x-3)}{(x+1)(x+1)^2};$$

$(x + 1)^2$ est positif donc f ’(x) est du signe de $(x - 3)(x + 1)$

Corrigé fiche 3

x		-1		3	
f '(x)	+	//	-	0	+

$$8)f'(x) = 4\left(\frac{x}{3-x}\right)^3\left(\frac{3-x+x}{(3-x)^2}\right) = \frac{12x^3}{(3-x)^5}$$

Tous les carrés sont positifs , donc f '(x) est du signe de x (3 – x)

x		0		3	
x	-	0	+		+
(3-x)	+		+	0	-
f '(x)	-	0	+	//	-

$$9)f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} > 0\ ;\ 10)f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} < 0$$

$$11)f'(x) = 2(x+3) + \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$$

Pour que la racine soit définie , x > - 2 donc x + 3 > 0 et f '(x) > 0

$$;\ 12)f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{2x-3}} > 0$$

Exercice 3

$$1)f'(x) = 3\sqrt{3x+1} + \frac{3(3x+1)}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{9}{2}\sqrt{3x+1}\ ;\ 2)f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x+1}(2x+1)}$$

$$3)f'(x) = sinx + cosx\ ;\ 4)f'(x) = 2cosxsinx\ ;\ 5)f'(x) = 1 + cosx\ ;$$

$$6)f'(x) = -2sinxcosx$$

$$7)f'(x) = -sin^2x + cos^2x = cos(2x)\ ;$$

$$8)f'(x) = 2(sinx + cosx)(cosx - sinx) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2cos(2x)$$

$$9)f'(x) = 2cos(2x)\ ;\ 10)f'(x) = -3sin(3x)\ ;\ 11)f'(x) = \frac{1}{cos^2x}$$

$$12)f'(x) = 2(x-1)(3-x)^3 - 3(3-x)^2(x-1)^2 = (x-1)(3-x)^2(9-5x)$$

Exercice type 1

1) On a : f '(x) = 3x² + 1 > 0 donc f est croissante sur ℝ
2) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\ donc\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty\ donc\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3) La fonction f est continue car polynôme ; elle est strictement croissante sur ℝ

On a de plus f(0) = -1 et f(1) = 1 donc 0 est dans [f(0) ;f(1)]

Donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans [0; 1] tel que f(a) = 0 .

4) Le tableau de variations complété donne :

Corrigé fiche 3

x	$-\infty$	0	a	1	$+\infty$
f(x)					$+\infty$
				1	
		-1			
			0		
	$-\infty$				

Par lecture du tableau de variations , on a donc : f(x) < 0 si x < a et f(x) > 0 si x > a .

Exercice type 2

1) On a :

$$g'(x) = 2x - 1$$

x	$-\infty$		1/2		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)			27/4		

2) On en déduit que g(x) > 0 sur ℝ car g admet un minimum positif
3) On a :

$$f'(x) = x^2 - x + 7 = g(x) > 0$$

Donc f est croissante sur ℝ