Corrigé fiche 5

Exercice 1

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x-7}{x^2+5x-8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}{1+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}}=3$$

$$car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2}=0$$

$$2)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-5}-\sqrt{x+7}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}\right)}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-12}{\sqrt{x-5}+\sqrt{x+7}}$$

$$=0\ car\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-5}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}x^2-5x+7=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}\right)=+\infty\ car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=0$$

$$4)\ \lim_{x\to4+}\frac{3-x}{x-4}=+\infty\ et\ \lim_{x\to4-}\frac{3-x}{x-4}=-\infty$$

x	3	4	
(3-x)/(x-4)	+	//	-

$$5)\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-8x+7}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=+\infty\ car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}=0$$

$$6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-8}{x^2+7x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{8}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{8}{x}}{x\left(1+\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}=0$$

$$car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}=0$$

Exercice 2

$$1)\ f(x)=(x^2-1)^4\ donc\ f'(x)=4(2x)(x^2-1)^3\ ;$$

$$2)f'(x)=3x^2(1+\sqrt{x})+\frac{x^3}{2\sqrt{x}}=3x^2(1+\sqrt{x})+\frac{\mathrm{x}^3\sqrt{\mathrm{x}}}{2\mathrm{x}}=3x^2+3\mathrm{x}^2\sqrt{\mathrm{x}}+\frac{\mathrm{x}^2\sqrt{\mathrm{x}}}{2}$$

$$=3\mathrm{x}^2+\frac{7}{2}x^2\sqrt{x}$$

$$3)f'(x)=4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}\ ;$$

$$4)f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\ donc\ f'(x)=\frac{(2x-1)(x^2+x-2)-(2x+1)(x^2-x-2)}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

$$5)f'(x)=8x\sqrt{x}+\frac{2x^2}{\sqrt{x}}=10x\sqrt{x}\ ;$$

$$6) f'(x) = \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)(x + \sqrt{x}) + \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2x^2 + 2x\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{x^2}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 3x^2 + \frac{5x\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2}$$

$$7) f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}\ ;$$

$$8) f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{2+x}\ donc\ f'(x) = \frac{1}{(2+x)^2}$$

$$9) f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\ ;\ 10) f'(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{2\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2-x}{\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}}$$

<u>*Exercice 3*</u>

1) On a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^2} = \frac{2x^2 - 3}{2\sqrt{3}x^2} = \frac{2\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)}{2\sqrt{3}x^2}$$

On travaille avec x > 0 donc

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f '(x)	-	0	+

Donc la fonction f est décroissante sur $\left]0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right[$ et f croissante sur $\left]\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$

2) On a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{3}} = 0\ et\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3}}{2x} = +\infty\ donc\ \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

La courbe de f admet donc une asymptote verticale d'équation x = 0

3) On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{3}} = +\infty\ et\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0\ donc\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

4) On a :

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f (x)	$+\infty$ ↘	$\sqrt{2}$	↗ $+\infty$

5) Puisque f admet un minimum positif , alors f est positif sur $]0; +\infty[$

6) La fonction f est dérivable donc continue ; f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$.
On a f(2) = $\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{11\sqrt{3}}{12}$. De plus 5 est dans l'intervalle $]f(2);+\infty[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique a dans $]2;+\infty[$ tel que f(a)=5 .

Exercice type

1) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \; donc \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x}{e^x}\times\frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}} \; et \; \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0 \; par\; cc\; donc \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation y = 0

2) On a :

$$\lim_{x\to0} x+1 = 1 \; et \; \lim_{x\to0+} e^x - 1 = 0^+ \; donc \; \lim_{x\to0+} f(x) = +\infty \; et \; \lim_{x\to0-} f(x) = -\infty$$

La courbe de f admet une asymptote verticale d'équation x = 0

3) $g'(x) = -e^x - xe^x = -e^x(1+x)$

$e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc g'(x) est du signe de -1 – x

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g '(x)		+ -	
g(x)		↗ 1/e – 1 ↘	

$$\frac{1}{e} - 1 < 0 \; donc \; g(x) \; < 0 \; puisque\; son\; maximum\; est\; négatif$$

4) On a :

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - e^x(x+1)}{(e^x-1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2} < 0 \; par \; 3)$$

La fonction f est donc décroissante .

5) On a :

$$y = (-e-1)(x-1) + \frac{2}{e-1}$$

$$donc\; y = -(e+1)x + e + 1 + \frac{2}{e-1} = -(e+1)x + \frac{e^2+1}{e-1}$$

6) Courbe

Corrigé fiche 5