Corrigé fiche 8

Exercice 1

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+8x}{3x^2+2x-4}\right)e^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{8}{x}}{3+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}e^x=+\infty\ car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{8}{x}}{3+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{3}$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty}(x^2+2x-8)e^x=\lim_{x\to-\infty}x^2e^x+2xe^x-8e^x=0\ car\ \lim_{x\to-\infty}x^2e^x=\lim_{x\to-\infty}2x\,e^x$$
$$=0(cc)\ et\ \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}(x^2-8x+7)e^x=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{8}{x}+\frac{7}{x^2}\right)e^x=+\infty$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}x^2e^x-2xe^x=\lim_{x\to+\infty}x^2e^x\left(1-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

Exercice 2

$$1)\ f(x)=(x^2+3x+7)e^x\Rightarrow f'(x)=(2x+3)e^x+(x^2+3x+7)e^x=(x^2+5x+10)e^x$$

$$\Delta=25-40=-15<0\ donc\ x^2+5x+10>0\ et\ e^x>0\ donc\ f'(x)>0$$

La fonction f est strictement croissante

$$2)\ f(x)=\frac{e^x}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

Or $e^x>0$ et (x+1)² > 0 donc f '(x) est du signe de x .

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f '(x)		-	$\Vert$	-	0	+	
f(x)		↘	$\Vert$	↘	1	↗	

$$3)\ f(x)=\frac{1}{x}-e^x\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}-e^x<0\ donc\ f\ décroissante$$

$$4)\ f(x)=(x-5)e^{x+5}\Rightarrow f'(x)=e^{x+5}+(x-5)e^{x+5}=(x-4)e^{x+5}$$

Or $e^{x+5}>0$ donc f '(x) est du signe de x – 4

x	$-\infty$		4		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)		↘	$-e^9$	↗	

Corrigé fiche 8

Exercice type

1) On a :

$$f(x) = ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{3}x = ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x$$
$$= ln(e^x+1) - ln(e^x) + \frac{1}{3}x = ln(e^x+1) - x + \frac{1}{3}x = ln(e^x+1) - \frac{2}{3}x$$

2) On a :

$$\lim_{x\to-\infty} ln(e^x+1) = 0\ donc\ \lim_{x\to-\infty} ln(e^x+1) - \frac{2}{3}x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} ln(e^{-x}+1) = 0\ donc\ \lim_{x\to+\infty} ln(e^{-x}+1) + \frac{1}{3}x = +\infty$$

3) On a :

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{2}{3} = \frac{e^x-2}{3(e^x+1)}$$

Or 3(e^x+1) > 0 donc f ’(x) est du signe de $e^x - 2$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > ln2$$

x	$-\infty$		ln 2		$+\infty$
f ’(x)		-	0	+	
f(x)		↘	ln 3 - 2/3 ln 2	↗	

4) La fonction f admet un minimum environ égal à 0,63 donc positif . La fonction f est donc toujours positive .