1 Théorèmes de convergence

A retenir

1. Si une suite (u_n) est croissante et convergente vers L alors (u_n) est majorée par L
2. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

Le principe

On utilise un raisonnement par l'absurde pour la première .
Pour la deuxième démonstration , les définitions suffiront .

Les démonstrations

1. Raisonnons par l'absurde :
   - Les hypothèses : Supposons que (u_n) n'est pas majorée par L alors **il existe p tel que** $u_p > L$
   - On peut donc trouver un intervalle ouvert qui contient L : $]L-1; u_p[$
   - La suite est croissante donc pour $n > p$, on a : $u_n > u_p$
   - La suite (u_n) converge vers L donc par définition u_n appartient à tout intervalle ouvert contenant L donc : $u_n \in]L-1; u_p[$
   - Contradiction entre $u_n > u_p$ et $u_n \in]L-1; u_p[$. Donc l'hypothèse de départ est fausse et donc (u_n) est majorée par L .
2. Soit une suite (u_n) croissante non majorée .
   - (u_n) non majorée donc pour tout réel A , il existe p tel que $u_p > A$
   - La suite est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > u_p > A \ \forall A$
   - Par définition , puisque pour tout réel A , u_n appartient à un intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

2 Théorème de comparaison

A retenir

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

Le principe

On utilise les définitions

La démonstration

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc **Pour tout réel A , il existe un entier m à partir duquel** u_m **appartient à** $]A; +\infty[$
- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang , donc il existe un entier p à partir duquel $u_n \leq v_n$
- Pour que les deux propriétés soient réalisées en même temps , il faut choisir $q = max\{m; p\}$. Alors , pour tout réel A , pour $n > q$, on a : $v_n \geq u_n > A$ et par la définition , $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

3 Suite géométrique

A retenir

Une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 tend vers ∞ .

Le principe

On va utiliser le théorème de comparaison

La démonstration

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q strictement supérieure à 1 . Alors , on peut prendre a réel strictement positif et poser $q = a+1$. On a donc : $u_n = u_0 q^n = u_0(1+a)^n$.
- On va montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+a)^n = +\infty$
  - Montrons d'abord que $(1+a)^n \geq 1 + na$. On va procéder par récurrence :
    - Initialisation : pour $n = 1$, c'est immédiat .
    - Hérédité : **On suppose que** $(1+a)^n \geq 1 + na$ **pour un n donné . Alors** $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$ **car** $na^2 > 0$ **.**
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ **car** $a > 0$
  - Par le théorème de comparaison , on a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+a)^n = +\infty$
- Etudions maintenant la limite de (u_n) .
  Si $u_0 > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
  Si $u_0 < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$