*Démonstrations lois de probabilités continues*

# 1 Loi uniforme

*A retenir*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ alors :

1. $P(x \leq X \leq y) = \dfrac{y-x}{b-a}$
2. $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$

### *Le principe*

On utilise les définitions .

### *Les démonstrations*

1. $P(x \leq X \leq y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_x^y = \frac{y}{b-a} - \frac{x}{b-a}$
2. $E(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathbf{d}t = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

# 2 Loi exponentielle

*A retenir*

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre k , réel strictement positif sur $[0; +\infty[$

1. $P(a \leq x \leq b) = e^{-ka} - e^{-kb}$
2. $P(X < a) = 1 - e^{-ka}$
3. $P(X > a) = e^{-ka}$
4. $E(X) = \dfrac{1}{k}$

### *Le principe*

On utilise les définitions .

### *Les démonstrations*

1. $P(a \leq x \leq b) = \displaystyle\int_a^b ke^{-kt}\,\mathbf{d}t = [-e^{-kt}]_a^b = -e^{-kb} + e^{-ka}$

2. $P(X < a) = P(0 < X < a) = e^0 - e^{-ka} = 1 - e^{-ka}$

3. $P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - (1 - e^{-ka}) = e^{-ka}$

4. $E(X) = \displaystyle\int_0^a kte^{-kt}\,\mathrm{d}t$. On cherche une primitive de $f(x) = kxe^{-kx}$ sous la forme de $F(x) = (Ax + B)e^{-kx}$ .
$F'(x) = Ae^{-kx} - k(Ax + B)e^{-kx} = (-kAx + A - kB)e^{-kx}$ **. Donc , on doit avoir :**
$\begin{cases} -kA &= k \\ A - kB &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= -1 \\ B &= -\dfrac{1}{k} \end{cases}$
Donc $F(x) = \left(-x - \dfrac{1}{k}\right) e^{-kx}$
$E(X) = \displaystyle\int_0^a kte^{-kt}\,\mathrm{d}t = \left[\left(-x - \frac{1}{k}\right) e^{-kx}\right]_0^a =$
$(-a - \dfrac{1}{k})e^{-ka} - (-\dfrac{1}{k})e^{-0} = -ae^{-ka} - \dfrac{1}{k}e^{-ka} + \dfrac{1}{k}$
$\displaystyle\lim_{a\to+\infty} ae^{-ka} = 0$ par croissance comparée et $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} e^{-ka} = 0$ donc $E(X) = \dfrac{1}{k}$

*A retenir*

Durée de vie sans vieillissement :
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre k , réel strictement positif , définie sur $[0; +\infty[$ , alors :
$P_{X\geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$

## *Le principe*

On utilise la formule des probabilités conditionnelles .

## *La démonstration*

$P_{X\geq t}(X \geq t + h) =$
$\dfrac{P(X \geq t) \cap (X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \dfrac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \dfrac{e^{-k(t+h)}}{e^{-kt}} = e^{-kh} = P(X \geq h)$

# 3 Loi normale centrée réduite

*A retenir*

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite définie sur $]-\infty;+\infty[$

1. $E(X)=0$
2. $P(X<-a)=P(X>a)$
3. $P(-a<X<a)=2P(X<a)-1$

## *Le principe*

On utilise la symétrie de la courbe de Gauss .

## *Les démonstrations*

1. $E(X)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_a^b xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]_a^b = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{b^2}{2}}-e^{-\frac{a^2}{2}}\right)$

   On cherche maintenant la limite : $\lim\limits_{a\to-\infty} e^{-\frac{a^2}{2}}=0$ et $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-\frac{b^2}{2}}=0$ donc $E(X)=0$

2. Par symétrie de la courbe de Gauss .

3. $P(-a<X<a)=1-(P<-a)+P(X>a))$ $=1-P(X>a)-P(X>a)=1-2P(X>a)=1-2(1-P(X<a))=2P(X<a)-1$

*A retenir*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite . Pour tout réel a compris entre 0 et 1 , il existe un unique réel $u_a$ positif tel que : $P(-u_a\leq X\leq u_a)=1-a$

## *Le principe*

On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires .

## *La démonstration*

$P(-x<X<x)=2P(0<X<x)$ par la symétrie de la courbe .

$P(0<X<x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite .

On pose $H(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ alors :

$H'(x) = f(x) > 0$ **donc H est croissante**
De plus , H est continue . $H(0) = \mathbf{0}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} H(x) =$ **0,5 par définition puisque c'est la moitié de l'aire sous la courbe de Gauss**
Or $P(-x < X < x) = 2P(0 < X < x) = 2H(x)$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , pour tout réel a compris entre 0 et 1 , $1 - a \in ]0;1[$ et il existe un unique réel positif u tel que $2H(u) = 1 - a$ .

*A retenir*

$u_{0,05} = 1,96$ et $u_{0,01} = 2,58$

## *Le principe*

On utilise la formule : $P(-a < X < a) = 2P(X < a) - 1$

## *La démonstration*

- $P(-u_{0,05} \leq X \leq u_{0,05}) = 0,95 \iff 2P(X \leq u_{0,05}) - 1 = 0,95$
  $\iff P(X \leq u_{0,05}) = 0,975$
  On utilise la calculatrice qui donne alors $u_{0,05} = 1,96$

- $P(-u_{0,01} \leq X \leq u_{0,01}) = 0,99 \iff 2P(X \leq u_{0,01}) - 1 = 0,99$
  $\iff P(X \leq u_{0,01}) = 0,995$
  On utilise la calculatrice qui donne alors $u_{0,01} = 2,58$

# 4 Loi normale quelconque

**A retenir**

Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ . Alors :
$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0,683$
$P(\mu-2\sigma < x < \mu+2\sigma) = 0,954$
$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0,997$

## *Le principe*

On fait un changement de variable pour se ramener à une loi normale centrée réduite puis on utilise la formule : $P(-a < X < a) = 2P(X < a) - 1$

## *La démonstration*

Posons $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \iff X = \sigma Y + \mu$.

- $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = P(\mu-\sigma < \sigma Y+\mu < \mu+\sigma) = P(-1 < Y < 1) = 2P(Y < 1)-1$ On utilise la calculatrice et on obtient la valeur cherchée .
- $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = P(\mu-2\sigma < \sigma Y+\mu < \mu+2\sigma) = P(-2 < Y < 2) = 2P(Y < 2)-1$ On utilise la calculatrice et on obtient la valeur cherchée .
- $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = P(\mu-3\sigma < \sigma Y+\mu < \mu+3\sigma) = P(-3 < Y < 3) = 2P(Y < 3)-1$ On utilise la calculatrice et on obtient la valeur cherchée .