1 Les conjugués

A retenir

Soient z et z' deux nombres complexes . Alors on a :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
3. $\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$
4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
5. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$
6. $\overline{\overline{z}} = z$
7. Si $z = x + iy$ alors $z\overline{z} = x^2 + y^2$

Le principe

Pour toutes ces démonstrations, on va écrire z et z' sous forme algébrique : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

Les démonstrations

1. $\overline{z+z'} = \overline{x + x' + i(y+y')} = x + x' - i(y+y') = x - iy + x' - iy' = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{(x+iy)(x'+iy')} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + x'y)} = xx' - yy' - i(xy' + x'y)$
   De plus , $\overline{z}\,\overline{z'} = \overline{x+iy} \times \overline{x' + iy'} = (x - iy)(x' - iy') = xx' - yy' - ixy' - ix'y$
   On a donc bien : $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
3. Par la relation précédente : $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} \times \overline{z'} = \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right) \times z'} = \overline{z}$ **donc** $\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} = \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$
4. $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x$
5. $z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = x + iy - x + iy = 2iy$
6. $\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$
7. $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$

2 Les modules

A retenir

Soient z et z' deux nombres complexes :

1. $z\overline{z} = |z|^2$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|zz'| = |z||z'|$
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $|z^n| = |z|^n$ pour n entier naturel

Le principe

On utilise la définition du module pour les trois premières puis la troisième pour démontrer les deux dernières

Les démonstrations

1. On pose $z = x + iy$. On a par définition : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
   De plus , $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$
2. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
   $|\overline{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $|zz'| = |(x + iy)(x' + iy')| = |xx' - yy' + i(x'y + xy')| = \sqrt{(xx' - yy')^2 + (x'y + xy')^2} = \sqrt{(xx')^2 + (yy')^2 + (x'y)^2 + (xy')^2}$
   De plus : $|z||z'| = \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{(xx')^2 + (xy')^2 + (yx')^2 + (yy')^2}$ Donc $|zz'| = |z||z'|$
4. Par la relation précédente : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| \times |z'| = \left|\dfrac{z}{z'} \times z'\right| = |z|$
   Donc : $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. On va démontrer cette relation par récurrence .
   Initialisation : **Pour** $n = 1$ **,** $|z| = |z|$
   Hérédité : On suppose que pour un n donné , $|z^n| = |z|^n$.
   Alors $|z^{n+1}| = |z^n \times z| = |z^n||z|$ **par la troisième relation . De plus par l'hypothèse de récurrence , on a :** $|z^n||z| = |z|^n|z| = |z|^{n+1}$ **.**
   Conclusion , $|z^n| = |z|^n$ pour tout n .

3 Les arguments

A retenir

Soient z et z' deux nombres complexes .

1. $arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi$
2. $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi$
3. $arg(z^n) = narg(z) + 2k\pi$
4. $arg(\overline{z}) = -arg(z) + 2k\pi$

Le principe

On revient à la définition de l'argument et on utilise les formules de trigonométrie qu'il faut donc bien connaitre pour la première . Les autres en découlent .

La première démonstration : la plus technique

Nous allons procéder avec la définition de l'argument .

- Notations : Soit $z = x + iy$ tel que $arg(z) = \theta$.
  Soit $z' = x' + iy'$ tel que $arg(z') = \theta'$.
  Soit $u = a + ib$ tel que $u = zz'$. On pose $arg(u) = \alpha$
- But : Montrer que $arg(u) = \theta + \theta'$
- Traduction avec les affixes : $u = zz' \iff (x + iy)(x' + iy') = a + ib$
  $\iff xx' - yy' + i(xy' + x'y) = a + ib \iff a = xx' - yy' etb = xy' + x'y$
- Traduction avec les arguments : $cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$ et $sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$
  $cos(\theta') = \frac{x'}{|z'|}$ et $sin(\theta') = \frac{y'}{|z'|}$
  $cos(\alpha) = \frac{a}{|u|} = \frac{xx' - yy'}{|z||z'|}$ et $sin(\alpha) = \frac{b}{|u|} = \frac{xy' + x'y}{|z||z'|}$
- Première formule à démontrer :$cos(\theta + \theta') = cos(\alpha) = \frac{xx' - yy'}{|z||z'|}$:
  $cos(\theta + \theta') = cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')$
  Donc $|z||z'|cos(\theta + \theta') = |z|cos(\theta)|z'|cos(\theta') - |z|sin(\theta)|z'|sin(\theta') = xx' - yy'$
  Donc $cos(\alpha) = cos(\theta + \theta')$
- Deuxième formule à démontrer : $sin(\theta + \theta') = sin(\alpha) = \frac{xy' + x'y}{|z||z'|}$:
  $sin(\theta + \theta') = sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta')$

Donc $|z||z'|sin(\theta+\theta') = |z|sin(\theta)|z'|cos(\theta') + |z|cos(\theta)|z'|sin(\theta') = yx' + xy'$
Donc $sin(\alpha) = sin(\theta+\theta')$

- On a donc $\alpha = \theta + \theta' + 2k\pi$

Attention

$cos(\theta+\theta') = cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')$
$cos(\theta-\theta') = cos(\theta)cos(\theta') + sin(\theta)sin(\theta')$
$sin(\theta+\theta') = sin(\theta)cos(\theta') + cos(\theta)sin(\theta')$
$sin(\theta-\theta') = sin(\theta)cos(\theta') - cos(\theta)sin(\theta')$

Une autre version de la première démonstration

On utilise l'écriture trigonométrique : ce sont les mêmes calculs mais la présentation gagne en élégance .

Les autres démonstrations

- $arg\left(\frac{z}{z'} \times z'\right) = arg\left(\frac{z}{z'}\right) + arg(z')$ par la formule précédente
  donc $arg(z) = arg\left(\frac{z}{z'}\right) + arg(z')$

- On procède par récurrence .
  Initialisation : $arg(z) = arg(z)$ Vrai au rang n = 1
  Hérédité : On suppose que pour un n donné , $arg(z^n) = narg(z)$.
  $arg(z^{n+1}) = arg(z^n z) = arg(z^n) + arg(z) = narg(z) + arg(z) = (n+1)arg(z)$

- Posons $z = x + iy$ avec $arg(z) = \theta$ alors $\overline{z} = x - iy$. Posons $arg(\overline{z}) = \theta'$.
  $x = |z|cos(\theta)$ et $y = |z|sin(\theta)$. On a alors $-y = -|z|sin(\theta) = |z|sin(-\theta)$ donc $cos(\theta') = cos(\theta) = cos(-\theta)$ **et** $sin(\theta') = sin(-\theta)$ **donc** $\theta' = -\theta$

Angles et longueurs

A retenir

Soient $A(x_A; y_A)$ d'affixe a , $B(x_B, y_B)$ d'affixe b et $C(x_C; y_C)$ d'affixe c alors :

1. $AB = |b - a|$
2. $\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right) = arg(b-a) + 2k\pi$
3. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + 2k\pi$

Le principe

On utilise les définitions .

Les démonstrations

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |b - a|$

2. Soit un point M d'affixe z tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Par définition , $arg(z) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right)$.
   Or $z - 0 = b - a$ **donc** $arg(z) = arg(b - a) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right)$

3. $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AC}\right)$
   $= -\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AC}\right) =$
   Donc : $-arg(b - a) + arg(c - a) = arg\left(\dfrac{c - a}{b - a}\right)$

Réel ou imaginaire pur

A retenir

1. - z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$
   - z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$
2. - z est réel si et seulement si $arg(z) = k\pi$
   - z est imaginaire pur si et seulement si $arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Le principe

On utilise simplement les définitions .

Les démonstrations

1. - Soit $z = x + iy$. Alors : $z = \overline{z} \iff x + iy = x - iy \iff 2iy = 0 \iff y = 0 \iff$ **z réel .**
   - $z = -\overline{z} \iff x + iy = -x + iy \iff 2x = 0 \iff x = 0 \iff$ **z imaginaire pur**
2. - Soit $z = re^{i\theta}$ avec r réel positif . Alors : $arg(z) = k\pi \iff z = re^{ik\pi} = \pm r \iff$ **z réel**
   - $arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \iff z = r(\pm i] = \pm ir \iff$ **z est imaginaire pur**

La forme exponentielle

A retenir

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta + 2k\pi$
3. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
5. Formule de Moivre : $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$
6. Formules d'Euler : $cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Le principe

On utilise les propriétés précédentes et la définition de l'écriture exponentielle :
$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$.

Les démonstrations

1. $|e^{i\theta}| = \sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$
2. C'est la définition de l'écriture trigonométrique .
3. Soient $z = e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$ alors $arg(zz') = argz + argz' = \theta + \theta'$.
   De plus , $|zz'| = |z||z'| = 1$
   Donc $zz' = 1e^{i(\theta+\theta')}$
4. Soit $z = e^{i\theta}$, alors $|\overline{z}| = |z| = 1$
   Et $arg(\overline{z}) = -arg(z) = -\theta$
   Donc $\overline{z} = 1e^{-i\theta}$
5. Par récurrence . L'initialisation est immédiate pour n=1 .
   Hérédité :On suppose que pour un n donné , $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, alors :
   $e^{i(n+1)\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}$
6. On a : $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ et $e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta$. On ajoute et on obtient la première formule d'Euler . On soustrait pour la deuxième .