1 Unicité de la fonction exponentielle

A retenir

La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)\ \forall x$

Le principe

Pour démontrer l' unicité , on utilise un deuxième objet.

La démonstration

- Soit g une fonction telle que $g(0) = 1$ et $g'(x) = g(x)$
- Posons $h(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$ pour tout x .
- Procédé qui va être suivi : montrer $h'(x) = 0\ \forall x$ puis $h(x) = 1\ \forall x$ et donc $g(x) = e^x\ \forall x$
- $h'(x) = \dfrac{g'(x)e^x - g(x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{g(x)e^x - g(x)e^x}{(e^x)^2} = 0\ \forall x$
- $h'(x) = 0\ \forall x$ donc h est une fonction constante . Or $h(0) = \dfrac{g(0)}{e^0} = 1$. Donc $h(x) = 1\ \forall x$
- Conclusion : $g(x) = e^x\ \forall x$ donc la fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$

2 La relation fonctionnelle

A retenir

La fonction $f(x) = e^x$ est la seule fonction vérifiant $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous x et y réels et $f'(0) = 1$

Le principe

On montre que la fonction exponentielle vérifie la formule en utilisant une fonction auxiliaire . Puis , on démontre la réciproque .

La démonstration

- La fonction exponentielle vérifie bien la formule :
  - On sait que $e^0 = 1$ et que $(e^x)' = e^x$.
  - On pose $g(x) = \dfrac{e^{x+y}}{e^x}\ \forall x$ pour un y quelconque .

- Puisque g est en fonction de x , y est considérée comme une constante donc $g'(x) = \dfrac{e^{x+y}e^x - e^x e^{x+y}}{(e^x)^2} = 0\ \forall x$
  On peut donc en déduire que g est **une fonction constante**
- $g(0) = \dfrac{e^y}{1} = e^y$
- On a donc : $g(x) = e^y$ et $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous x et y réels .
- $(e^x)' = e^x$ donc la fonction $f(x) = e^x$ vérifie $f'(0) = 1$

• Réciproque : Si une fonction f vérifie $f(x + y) = f(x)f(y)$ pour tous x et y réels et $f'(0) = 1$, alors $f(x) = e^x\ \forall x$

- Montrons d'abord que $f'(x) = f(x)\ \forall x$
  On dérive $f(x + y) = f(x)f(y)$ par rapport à x :
  $f'(x + y) = f'(x)f(y)\ \forall (x, y)$
  Prenons , $x = 0$: $f'(y) = f'(0)f(y)\ \forall y \iff f'(y) = f(y)\ \forall y$
- Déterminons maintenant $f(0)$:
  $f(0 + y) = f(0)f(y)\ \forall y \iff f(y) = f(0)f(y)\ \forall y$
  donc $f(0) = 1$
- Par définition de la fonction exponentielle , $f(x) = e^x\ \forall x$

3 Les propriétés algébriques

A retenir

1. $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
2. $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$
3. $e^{nx} = (e^x)^n$ pour tout n entier naturel non nul .

Le principe

On applique la relation fonctionnelle

Les démonstrations

1. $e^{x-y}e^y = e^{x-y+y}$ **par la relation fonctionnelle**
   $e^{x-y}e^y = e^x$ **donc** $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
2. On utilise la formule précédente : $\dfrac{e^0}{e^x} = e^{0-x}$

3. Par récurrence , l'initialisation est immédiate avec $n = 1$
   Hérédité : on suppose que pour un n donné , $e^{nx} = (e^x)^n$, alors :
   $e^{(n+1)x} = e^{nx}e^x$ **par la relation fonctionnelle**
   $= (e^x)^n e^x = (e^x)^{n+1}$

4 Les propriétés de la fonction exponentielle

A retenir

1. $e^x > 0 \ \forall x$
2. La fonction e^x est strictement croissante pour tout x réel
3. $a < b \iff e^a < e^b$ pour tous réels a et b .

Le principe

On applique les définitions

Les démonstrations

1. $e^x = e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 \geq 0$.
   Supposons qu'il existe un x tel que $e^x = 0$, alors : $\forall y : e^{x+y} = e^x e^y \iff e^y = 0$
   $forally$
   Donc $e^x > 0 \ \forall x$
2. $(e^x)' = e^x > 0$ **donc** e^x **croissante**
3. Par définition d'une fonction strictement croissante .

5 Les limites simples

A retenir

1. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
3. Comportement à l'origine : $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Le principe

Pour la première , on va comparer deux fonctions .
La deuxième découle directement de la première .
La troisième utilise le nombre dérivé .

Les démonstrations

1. On pose $f(x) = e^x - x$. On étudie cette fonction :
   $f'(x) = e^x - 1$. $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

   Par lecture du tableau de variations , on a : $f(x) > 0$, donc $e^x > x$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par le théorème de comparaison , $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}}$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$

3. Posons $f(x) = e^x$. Alors , par définition du nombre dérivé :
   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$

Attention

Soit f une fonction dérivable en a , alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$