1 Existence de la fonction logarithme népérien

A retenir

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à t réel strictement positif , associe x réel tels que $e^x = t$
$ln1 = 0$

Le principe

On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires avec la fonction exponentielle

La démonstration

Par étude de la fonction exponentielle , on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Soit t un réel strictement positif , alors par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique réel x tel que $e^x = t$. On pose alors $ln(t) = x$
On sait que $e^0 = 1$ donc par la construction précédente , $ln1 = 0$

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. La fonction $f(x) = lnx$ est continue sur $]0; +\infty[$
2. La fonction $f(x) = lnx$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
3. $a \leq b \iff lna \leq lnb$

Le principe

On utilise simplement les définitions

Les démonstrations

1. La fonction $f(x) = lnx$ est dérivable donc continue .
2. $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ **sur** $]0; +\infty[$ **donc f est croissante**
3. Par définition d'une fonction strictement croissante .

3 Formules de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. $ln(ab) = lna + lnb$
2. $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$
3. $ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -lnb$
4. $ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}lna$
5. $ln(a^n) = nlna$ avec n entier naturel non nul .

Le principe

On va utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour la première puis utiliser cette formule pour démontrer les autres .

Les démonstrations

1. On pose : $X = lna$ et $Y = lnb$. Alors : $e^{X+Y} = e^{lna+lnb} = e^{lna}e^{lnb} = ab$ En utilisant le fait que les fonctions sont réciproques : $X + Y = ln(ab) \iff lna + lnb = ln(ab)$
2. $ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right) + lnb \iff lna = ln\left(\frac{a}{b}\right) + lnb \iff ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$
3. $ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = ln1 - lnb = 0 - lnb = -lnb$
4. $ln(\sqrt{a}\sqrt{a}) = ln\sqrt{a} + ln\sqrt{a}$ **par la première formule**
   $\iff lna = 2ln\sqrt{a}$
5. Par récurrence : l'initialisation est immédiate pour n = 1 .
   Hérédité : **On suppose que pour un n donné ,** $ln(a^n) = nlna$ **, alors** $ln(a^{n+1}) = ln(a^n a) = ln(a^n) + lna = nlna + lna = (n + 1)lna$

4 Limites de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$

Le principe

On utilise les formules de limites de la fonction exponentielle pour la première puis on en déduit la deuxième . La troisième découle du nombre dérivé .

Les démonstrations

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{lnx} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \iff \lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$
   car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty \iff \lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -lnx = -\infty \iff \lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ **.** Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ =0
   donc $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$
3. On pose $f(x) = ln(x+1)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et par la définition du nombre dérivé :
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) \iff \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)-0}{x-0} = \dfrac{1}{0+1} \iff \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$