1 Limites de suites

1.1 Premières définitions

Définition.
Soit (u_n) une suite . On dit que (u_n) tend vers L si et seulement si tout intervalle ouvert contenant L contient aussi tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang .

Dans ce cas , on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

Définition.
Soit (u_n) une suite . On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang .

Dans ce cas , on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Définition.
Une suite converge si elle admet une limite finie .

Une suite non convergente est dite divergente

Attention

Une suite est donc divergente si elle a une limite infinie ou si elle n'a pas de limite .

Exemple.
$u_n = (-1)^n$ diverge car elle n'a pas de limite .

1.2 Règles de calculs

Propriété.
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ avec p entier naturel

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$ avec p entier naturel .

On applique les opérations habituelles pour calculer des limites .

Attention

Il y a quatre formes indéterminées :
$\dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad \dfrac{0}{0}$ $\quad \infty \times 0$ $\quad +\infty - \infty$

Exemple.
1. Déterminer la limite de $u_n = n^2 + n + 5$
2. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{3}{n^2 + 1}$
3. Déterminer la limite de $u_n = (n+1)(n^2 - 9)$

1.3 Lever une indétermination

Méthode.
On factorise par le facteur de plus haut degré pour supprimer une forme indéterminée .

Exemple.
1. Déterminer la limite de $u_n = n^2 - n + 8$
2. Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{n^2 + n + 8}{n^3 + 8}$

2 Théorèmes de comparaison

Théorème. (Théorème des gendarmes)
si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite a , alors (v_n) converge et tend vers a .

Corollaire. *(Théorème de comparaison)*
si $u_n \leq v_n$ et si u_n tend vers $+\infty$ alors v_n tend vers $+\infty$

Exemple.
Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$

3 Suite géométrique

Propriété.
Une suite géométrique de raison q avec $q > 1$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

Une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$ tend vers 0

Exemple.
Déterminer la limite de la suite géométrique de raison 0,5

Exemple.
Déterminer la limite de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme -3

Propriété.
Soit une suite géométrique (u_n)de raison q avec $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{u_0}{1-q}$

4 Suites arithmético-géométriques

Définition.
On appelle suite arithmético-géométrique une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = au_n + b$

Propriété.
Pour étudier une telle suite , on commence par chercher c tel que $c = ac+b$ puis on démontre que la suite $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison q . Alors $u_n = (u_0 - c) \times q^n + c$

Exemple.
Etudier la suite définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$