1 Théorème de comparaison

A retenir

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \implies \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

Le principe

On utilise les définitions

La démonstration

- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc **Pour tout réel A , il existe un entier m à partir duquel u_m appartient à** $]A; +\infty[$
- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang , donc il existe un entier p à partir duquel $u_n \leq v_n$
- Pour que les deux propriétés soient réalisées en même temps , il faut choisir $q = max\{m; p\}$. Alors , pour tout réel A , pour $n > q$, on a : $v_n \geq u_n > A$ et par la définition , $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

2 Suite géométrique

A retenir

Une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 tend vers ∞ .

Le principe

On va utiliser le théorème de comparaison

La démonstration

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q strictement supérieure à 1 . Alors , on peut prendre a réel strictement positif et poser $q = a+1$. On a donc : $u_n = u_0 q^n = u_0(1+a)^n$.
- On va montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} (1+a)^n = +\infty$
  - Montrons d'abord que $(1+a)^n \geq 1 + na$. On va procéder par récurrence :
    * Initialisation : pour $n = 1$, c'est immédiat .

  - $*$ Hérédité : **On suppose que** $(1+a)^n \geq 1+na$ **pour un n donné . Alors** $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$ **car** $na^2 > 0$ **.**
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+na = +\infty$ **car** $a > 0$
- Par le théorème de comparaison , on a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+a)^n = +\infty$

- Etudions maintenant la limite de (u_n) .
  Si $u_0 > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
  Si $u_0 < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

3 Somme des termes d'une suite géométrique

A retenir

Soit une suite géométrique (u_n)de raison q avec $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{u_0}{1-q}$

Le principe

On utilise la formule de la somme des termes d'une suite géométrique

La démonstration

Soit une suite géométrique (u_n)de raison q avec $-1 < q < 1$ alors $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{1-q^n}{1-q} \times u_0$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{u_0}{1-q}$