A retenir

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
3. Comportement à l'origine : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Le principe

Pour la première , on va comparer deux fonctions .
La deuxième découle directement de la première .
La troisième utilise le nombre dérivé .

Les démonstrations

1. On pose $f(x) = e^x - x$. On étudie cette fonction :
   $f'(x) = e^x - 1 \quad e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   Par lecture du tableau de variations , on a : $f(x) > 0$, donc $e^x > x$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par le théorème de comparaison , $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}}$. Or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{-x}} = 0$

3. Posons $f(x) = e^x$. Alors , par définition du nombre dérivé :
   $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$

Attention

Soit f une fonction dérivable en a , alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

A retenir

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Le principe

On va d'abord démontrer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ en comparant e^x et $\dfrac{x^2}{2}$
Puis , on fait un changement de variable .

La démonstration

Soit $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$. Etudions cette fonction sur $[0; +\infty[$ puisque nous cherchons la limite en $+\infty$, on peut considérer que x est positif

$f'(x) = e^x - x$. Nous ne pouvons pas directement connaitre le signe de f' donc nous dérivons une nouvelle fois .

$f''(x) = e^x - 1$. Or $f''(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$.

On sait donc que sur $[0; +\infty[$, $f''(x) \geq 0$ et que f' est croissante .

Or $f'(0) = 1 > 0$ donc f' est positive sur $[0; +\infty[$ et la fonction f est croissante .

Or $f(0) = 1$ donc $f(x) > 0$ et $e^x > \dfrac{x^2}{2} \iff \dfrac{e^x}{x} > \dfrac{x}{2}$ car $x > 0$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$ donc par le théorème de comparaison , $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

On peut écrire : $\dfrac{e^x}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\frac{x^n}{n^n}} \times n^n = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \times n^n$

Par ce qui précède , $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$