

---

# 1 Continuité

## 1.1 Définitions

**Définition.**

On dit qu'une fonction  $f$  est continue au point  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

*Remarque.*

La courbe d'une fonction continue ne présente aucune coupure sur son domaine de définition

**Définition.**

On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  si et seulement si  $f$  est continue pour tout  $a$  élément de  $I$

**Propriété.**

Les fonctions polynômes, racines, puissances, fractions, exponentielles sont continues sur leur domaine de définition

## 1.2 Théorème du point fixe

**Théorème.**

Soit  $f$  une fonction continue et soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Alors, si la suite converge vers une limite  $a$ , cette limite vérifie  $a = f(a)$

*Exemple.*

Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_{n+1} = 0,5u_n - 5$  et  $u_0 = 4$ . On admet que  $(u_n)$  converge. Déterminer sa limite.

## 1.3 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème.**

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $I$ . Soient deux réels  $a$  et  $b$  de  $I$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$

**Corollaire.**

Soit  $f$  une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ . Soient deux réels  $a$  et  $b$  de  $I$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = k$

*Exemple.*

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 2$ . Dresser le tableau de variations de  $f$  puis montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $a$  dont on donnera un encadrement à 0,01 près.

## 2 Dérivation

### 2.1 Dérivabilité et continuité

**Définition.**

$f$  est dérivable en  $a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est finie

Dans ce cas,  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

**Propriété.**

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty \iff$  la courbe de  $f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $a$

**Propriété.**

Si une fonction est dérivable en  $a$ , alors elle est continue en  $a$

**Propriété.**

Les fonctions polynômes, racines, fractions, puissances, exponentielles sont dérivables sur leur ensemble de définition ouvert.

*Exemple.*

Regardons si la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x}$  est dérivable en 0.

### 2.2 Dérivées de fonctions composées

**Définition.**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions. On appelle fonction composée de  $u$  et  $v$  la fonction notée  $v \circ u$  définie par  $v \circ u(x) = v(u(x))$

**Théorème.**

Soient  $u$  et  $f$  deux fonctions dérivables . Alors  $(f(u(x)))' = u'(x) \times f'(u(x))$

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$x$	$1$	$u$	$u'$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$u^n$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{u^n}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$e^x$	$e^x$	$e^u$	$u'e^u$

*Exemple.*

Dériver :  $f(x) = \sqrt{3x-5}$

*Exemple.*

Dériver :  $f(x) = e^{3x^2-5x+7}$

## 3 Convexité

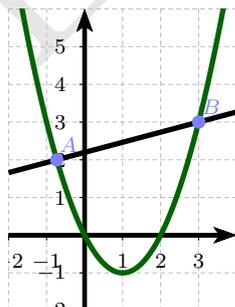
### 3.1 Sécantes et tangentes

#### Définition.

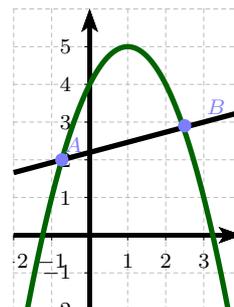
Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  .

- On dit que  $f$  est une fonction convexe si la courbe de  $f$  est en dessous de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection
- On dit que  $f$  est une fonction concave si la courbe de  $f$  est au dessus de chacune de ses sécantes entre les deux points d'intersection

Courbe d'une fonction convexe



Courbe d'une fonction concave



*Exemple.*

Les fonctions  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = e^x$  sont convexes sur  $\mathbb{R}$

**Propriété.**

$f$  convexe  $\iff -f$  concave

**Propriété.**

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable . Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction  $f$  est convexe
2. La courbe de  $f$  est au dessus de ses tangentes
3. La fonction  $f'$  est croissante
4. La fonction  $f''$  est positive

### 3.2 Inégalités

**Propriété.**

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable et soit  $t$  un réel de l'intervalle  $[0;1]$  . Alors :

- Si  $f$  est convexe alors  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
- Si  $f$  est concave alors  $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$

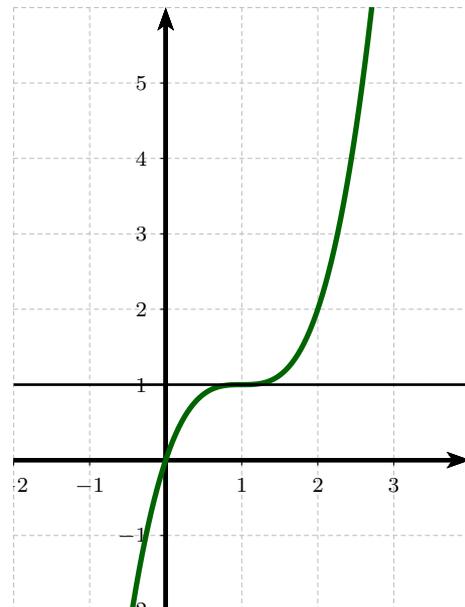
*Exemple.*

Soit  $f(x) = e^x$  et soit  $t = \frac{1}{3}$  alors  $e^{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y} \leq \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^y$

### 3.3 Point d'inflexion

**Définition.**

Soit une fonction deux fois dérivable . Soit  $A$  un point de la courbe de  $f$  . On dit que  $A$  est un point d'inflexion si la courbe traverse sa tangente au point  $A$



**Propriété.**

En un point d'inflexion ,  $f''$  change de signe .