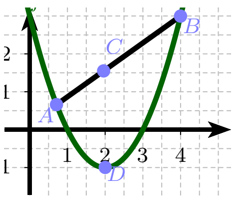
> *A retenir*
> Soit f une fonction dérivable deux fois et soit t un réel de l'intervalle [0 ;1] . Si f est convexe alors $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$

Le principe

On va tracer une sécante à la courbe

Puisque f est convexe , on sait que la sécante est au dessus de la courbe . On va donc prendre un point de la courbe et un point de la sécante ayant la même abscisse et comparer leurs ordonnées

La démonstration



Soient A et B deux points de la courbe . On choisit A(a ;f(a)) et B(b ;f(b)) .

Déterminons une équation de (AB)

Soit M(x ;y) un point de (AB) alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires .

$\overrightarrow{AM}(x-a;y-f(a))$ et $\overrightarrow{AB}(b-a;f(b)-f(a))$

La colinéarité donne : $(x-a)(f(b)-f(a))-(b-a)(y-f(a)=0$

$\iff (x-a)(f(b)-f(a))+(b-a)f(a)=(b-a)y \iff y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

$(AB): y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

Déterminons les coordonnées de C et D

Soit C le point de la droite (AB) d'abscisse $ta+(1-t)b$. Déterminons son ordonnée .

$y_C = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x_C+\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b)+\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a} = \dfrac{(f(b)-f(a)(t(a-b)+bf(b)-bf(a)++bf(a)-af(b)}{b-a} = \dfrac{-t(f(b)-f(a)(b-a)+(b-a)f(b)}{b-a} = tf(a)+(1-t)f(b)$

Donc : $y_C = tf(a)+(1-t)f(b)$

Soit D le point d'abscisse $ta+(1-t)b$ placé sur la courbe . Alors $y_D=f(ta+(1-t)b)$

Conclusion

La fonction f est convexe donc toute sécante est au dessus de la courbe donc le point C est au dessus du point D et donc $y_D \leq y_C$ d'où : $f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b)$

A retenir

Soit f une fonction dérivable deux fois . Si f" est positive alors la courbe de f est au dessus de ses tangentes .

Le principe

On va étudier la position relative de la courbe de f et d'une tangente quelconque .

La démonstration

Supposons que $f''(x) \geq 0$

On sait que l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Posons $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a))$ et étudions le signe de g

$g'(x) = f'(x) - f'(a)$

$g''(x) = f''(x)$. Or $f''(x) \geq 0$ donc $g''(x) \geq 0$.

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g''(x)$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On en conclut que g' est croissante . De plus , $g'(a) = 0$ donc on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	$+$	

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Puisque le minimum de g est nul , alors $g(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ ce qui prouve que la courbe est au-dessus de sa tangente .