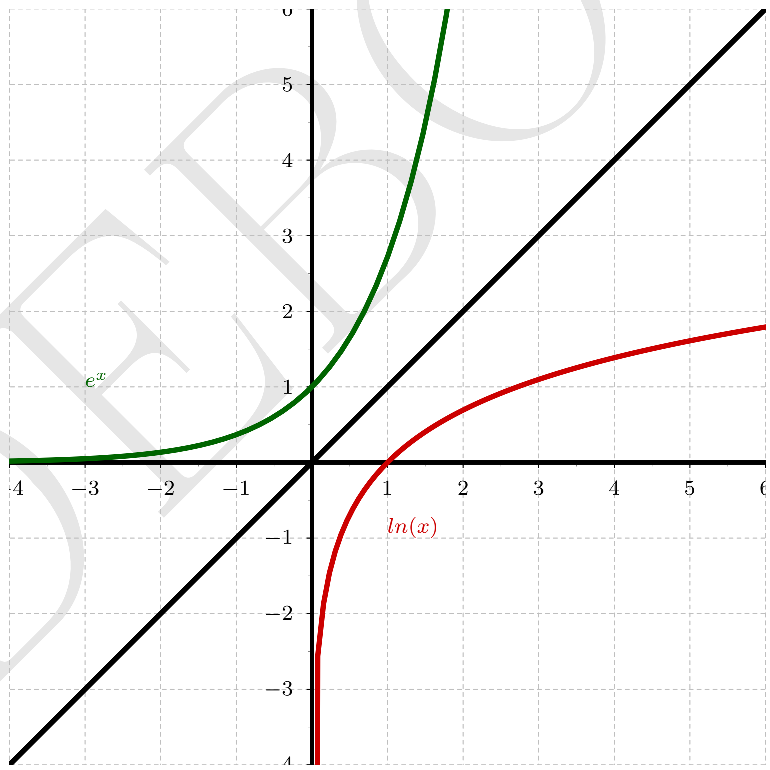
1 Premières notions de la fonction logarithme népérien

1.1 Définitions

Propriété.
L'équation $e^x = t$ avec $t > 0$ fixé admet une unique solution x . La fonction qui à t associe x est appelée logarithme népérien et on note $ln(t) = x$

Propriété.

- La fonction $x \to ln(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$
- Les fonctions $x \to ln(x)$ et $x \to e^x$ sont réciproques c'est à dire que $e^{ln(x)} = x$ pour $x > 0$ et $ln(e^x) = x$ pour tout x .
- Les courbes des fonctions $x \to ln(x)$ et $x \to e^x$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice
- $ln1 = 0$ et $lne = 1$



1.2 Relations fonctionnelles de la fonction logarithme népérien

Propriété.
Soient x et y deux réels strictement positifs

- $ln(xy) = lnx + lny$
- $ln\left(\frac{1}{x}\right) = -lnx$
- $ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$
- $ln(x^n) = nlnx$ pour $n \in \mathbb{N}$
- $ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}lnx$

Exemple.
Simplifier : $ln8 + ln4 - 3ln2$

2 Dérivabilité et limites

2.1 Dérivabilité de la fonction logarithme népérien

Théorème.
La fonction $x \to ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(lnx)' = \frac{1}{x}$

Théorème.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive . Alors la fonction $x \to ln(u(x))$ est dérivable et $(ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Propriété.

- La fonction $x \to ln(x)$ est continue sur $]0; +\infty[$
- La fonction $x \to ln(x)$est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- $lnx = lny \iff x = y$ pour x et y réels strictement positifs
- $lnx < lny \iff x < y$ pour x et y réels strictement positifs
- $lnx > 0 \iff x > 1$

Exemple.
Résoudre : $ln(x - 2) = ln(3 - x)$

2.2 Limites de la fonction logarithme népérien

Propriété. (limites usuelles)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$

Propriété. (comportement à l'origine)
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{lnx}{x-1} = 1$

Propriété. (croissances comparées)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{lnx}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n lnx = 0$

Exemple.
Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3lnx + x^2$

Exemple.
Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3lnx - x^2$