1 Existence de la fonction logarithme népérien

A retenir

La fonction logarithme népérien est la fonction qui à t réel strictement positif , associe x réel tels que $e^x = t$
$ln1 = 0$

Le principe

On utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires avec la fonction exponentielle

La démonstration

Par étude de la fonction exponentielle , on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Soit t un réel strictement positif , alors par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , il existe un unique réel x tel que $e^x = t$. On pose alors $ln(t) = x$
On sait que $e^0 = 1$ donc par la construction précédente , $ln1 = 0$

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. La fonction $f(x) = lnx$ est continue sur $]0; +\infty[$
2. La fonction $f(x) = lnx$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
3. $a \leq b \iff lna \leq lnb$

Le principe

On utilise simplement les définitions

Les démonstrations

1. La fonction $f(x) = lnx$ est dérivable donc continue .
2. $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ **sur** $]0; +\infty[$ **donc f est croissante**
3. Par définition d'une fonction strictement croissante .

3 Formules de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. $ln(ab) = lna + lnb$
2. $ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$
3. $ln\left(\frac{1}{b}\right) = -lnb$
4. $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}lna$
5. $ln(a^n) = nlna$ avec n entier naturel non nul .

Le principe

On va utiliser les propriétés de la fonction exponentielle pour la première puis utiliser cette formule pour démontrer les autres .

Les démonstrations

1. On pose : $X = lna$ et $Y = lnb$. Alors : $e^{X+Y} = e^{lna+lnb} = e^{lna}e^{lnb} = ab$ En utilisant le fait que les fonctions sont réciproques : $X + Y = ln(ab) \iff lna + lnb = ln(ab)$
2. $ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right) + lnb \iff lna = ln\left(\frac{a}{b}\right) + lnb \iff ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$
3. $ln\left(\frac{1}{b}\right) = ln1 - lnb = 0 - lnb = -lnb$
4. $ln(\sqrt{a}\sqrt{a}) = ln\sqrt{a} + ln\sqrt{a}$ **par la première formule**
   $\iff lna = 2ln\sqrt{a}$
5. Par récurrence : l'initialisation est immédiate pour n = 1 .
   Hérédité : **On suppose que pour un n donné ,** $ln(a^n) = nlna$ **, alors** $ln(a^{n+1}) = ln(a^n a) = ln(a^n) + lna = nlna + lna = (n+1)lna$

4 Formule de dérivée

A retenir

La fonction $x \to ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(lnx)' = \dfrac{1}{x}$

Le principe

La dérivabilité est admise .

On utilise la réciprocité des fonctions exponentielle et logarithme et la formule de la dérivée de la fonction exponentielle

La démonstration

On admet la dérivabilité . Soit x un réel strictement positif .

$(e^{ln(x)})' = (lnx)'e^{lnx}$ par la formule de la dérivée de l'exponentielle

Or $e^{lnx} = x$ donc $(e^{ln(x)})' = (lnx)'e^{lnx} \iff x' = (lnx)'x \iff 1 = x(lnx)' \iff (lnx)' = \dfrac{1}{x}$

5 Limites de la fonction logarithme népérien

A retenir

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$

Le principe

On utilise les formules de limites de la fonction exponentielle pour la première puis on en déduit la deuxième . La troisième découle du nombre dérivé .

Les démonstrations

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{lnx} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$
   car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty \iff \lim\limits_{t \to +\infty} t = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} lnx = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -lnx = -\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ **.** Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   donc $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$

3. On pose $f(x) = ln(x+1)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et par la définition du nombre dérivé : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x+1) - 0}{x - 0} = \dfrac{1}{0+1} \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(x+1)}{x} = 1$

6 Croissance comparée

A retenir

- $\lim\limits_{x \to 0} x^n lnx = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{lnx}{x^n} = 0$

Le principe

On va démontrer la première en utilisant les formules de limite de la fonction exponentielle
La deuxième se démontre par un changement de variable

Les démonstrations

1. Soit x un réel strictement positif . On a : $xlnx = e^{lnx} lnx$. Or $\lim\limits_{x \to 0} lnx = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} (lnx) e^{lnx} = 0$ d'où : $\lim\limits_{x \to 0} xlnx = 0$

   Procédons maintenant à un changement de variable : $x^n lnx = x^n \dfrac{ln(x^n)}{n} = \dfrac{x^n ln(x^n)}{n}$.
   Par ce qui précède , $\lim\limits_{x \to 0} x^n ln(x^n) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x^n lnx = 0$

2. Là encore , on procède par changement de variable : $\dfrac{lnx}{x^n} = \dfrac{-ln(\frac{1}{x})}{x^n} = -\left(\dfrac{1}{x}\right)^n ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   Or par 1) , $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} X^n lnX = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -\left(\dfrac{1}{x}\right)^n ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{lnx}{x^n} = 0$