

1 Intégrale d'une fonction continue sur $[a;b]$

1.1 Fonction continue positive

Définition.

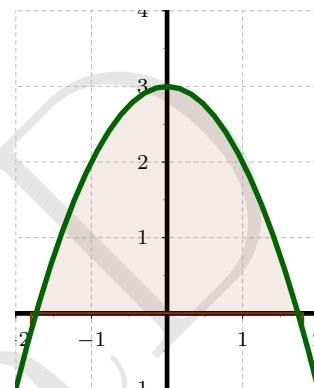
Soit f une fonction continue positive définie sur $[a;b]$. Soit C sa courbe représentative. On note D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On appelle intégrale de f entre a et b et on note

$$\int_a^b f(t) dt, \text{ l'aire du domaine } D.$$

Remarque.

"t" est une variable muette; on pourrait écrire $f(u)du$, $f(x)dx$

...



1.2 Fonction continue négative

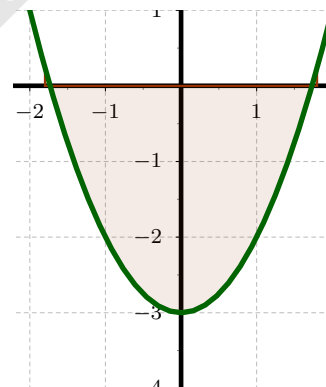
Définition.

Soit f une fonction continue négative définie sur $[a;b]$. Soit C sa courbe représentative. On note D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On appelle intégrale de f entre a et b et on note

$$\int_a^b f(t) dt, \text{ l'opposée de l'aire du domaine } D.$$

Remarque.

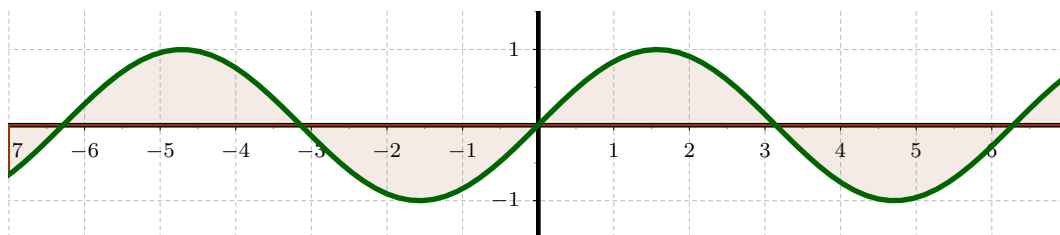
Une aire est toujours positive mais une intégrale peut être négative.



1.3 Cas quelconque

Définition.

Soit f une fonction continue définie sur $[a;b]$. Soit C sa courbe représentative. On note D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe C lorsqu'elle est située au dessus de l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note D' le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe C lorsqu'elle est située en dessous de l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. L'intégrale de f entre a et b est égale à : $\text{aire}(D) - \text{aire}(D')$





Propriété.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $f(x) \leq g(x)$, pour tout x de $[a;b]$. Alors, l'aire comprise entre les courbes de ces fonctions entre a et b est égale à :

$$\int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt$$

1.4 Propriétés

Ces propriétés sont admises

Propriété.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors : $\int_a^a f(t) dt = 0$

Propriété.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$

Théorème. (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Soient α et β des réels. Alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

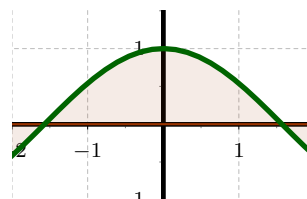
Théorème. (Chasles)

Soit f fonction continue sur $[a;c]$. Soit b un réel. Alors :

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$$

Exemple.

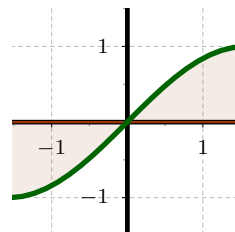
Si f est paire : $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$



Exemple.

Si f est une fonction impaire, alors

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$$



Théorème. (Conservation de l'ordre)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$. Si pour tout x de $[a;b]$, on a : $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$



Théorème. (Conservation du signe)

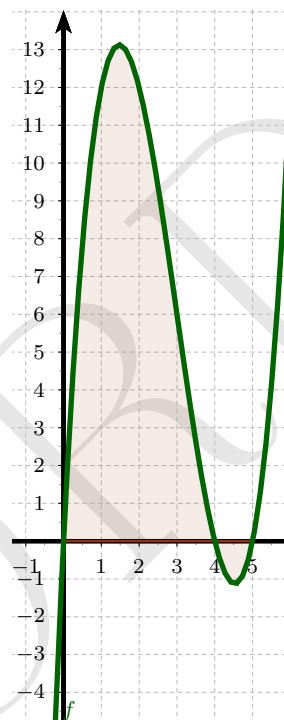
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Si pour tout x de $[a;b]$, on a : $f(x) \geq 0$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$



Attention

La réciproque est fausse : une intégrale peut être positive sans que la fonction le soit sur tout l'intervalle



Définition. (Valeur moyenne d'une fonction)

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On appelle valeur moyenne de f l'expression : $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

Propriété. (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telle que pour tout x de $[a;b]$, il existe m et M avec :

$$m \leq f(x) \leq M , \text{ alors : } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

2 Calculs d'intégrales

2.1 En utilisant des primitives

Propriété.

Toute fonction continue admet des primitives

Propriété.

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et soit F une de ses primitives . Alors

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple.

Calculer $\int_{-2}^3 \frac{2t-3}{t^2-3t+5} dt$

Propriété.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a un réel de I . Alors la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a . En particulier $F'(x) = f(x)$

2.2 Intégration par parties

Propriété.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Exemple.

Calculer $\int_0^3 te^t dt$