1 Notion de densité

Définition.
La fonction f est une fonction de densité de probabilité sur [a ;b] si et seulement si :

- f est continue sur [a ;b]
- f est positive sur [a ;b]
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 1$

Exemple.
Montrer que $f(x) = ke^{-kx}$ avec k réel positif est une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$

Définition.
X est une variable aléatoire à densité si et seulement si : $p(m \leq X \leq n) = \displaystyle\int_m^n f(t)\ \mathrm{d}t$ avec f une fonction de densité de probabilité .

Remarque.
L'aire sous la courbe de f entre m et n est égale à $p(m \leq X \leq n)$

Propriété.
Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f sur [a ;b]

- $p(X = a) = 0$
- $p(X \geq a) = p(X > a)$
- $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\ \mathrm{d}t$
- $V(X) = \displaystyle\int_a^b (t - E(X))^2 f(t)\ \mathrm{d}t$

2 Loi uniforme

Définition.
La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [a ;b] si et seulement si sa densité de probabilité est donnée par la fonction $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ définie sur [a ;b]

Propriété.

- $p(x \leq X \leq y) = \dfrac{y-x}{b-a}$
- $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exemple.
Des oiseaux relâchés , désorientés , choisissent leur direction au hasard . On modélise cette direction par une variable aléatoire égale à l'angle en degrés entre le nord et la direction prise par l'oiseau .On admet que X suit une loi uniforme sur [0 ;360] . Quelle est la probabilité que l'oiseau se dirige entre sud et sud-est ?

3 Loi exponentielle

Définition.
La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre k , réel strictement positif , si et seulement si sa densité de probabilité est donnée par $f(x) = ke^{-kx}$ sur $[0; +\infty[$

Propriété.

- $p(a \leq X \leq b) = e^{-ka} - e^{-kb}$
- $p(X \leq b) = 1 - e^{-kb}$
- $p(a \leq X) = e^{-ka}$
- $E(X) = \dfrac{1}{k}$

Propriété. (durée de vie sans vieillissement ou absence de mémoire)
$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = p(X \geq h)$

Exemple.
La durée de vie d'un téléviseur avant la première panne , exprimée en années , suit une loi exponentielle de paramètre 0,16 .

1. Calculer la probabilité que le téléviseur ne connaisse pas de panne au cours des trois premières années .
2. Calculer la probabilité que le téléviseur ayant déjà fonctionné 10 ans ait une durée de vie totale supérieure à 15 ans .