Nombres complexes

Exercice 1 (Amérique du nord juin 2015)
On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 &= -3 \\ y_0 &= 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} &= 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} &= 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

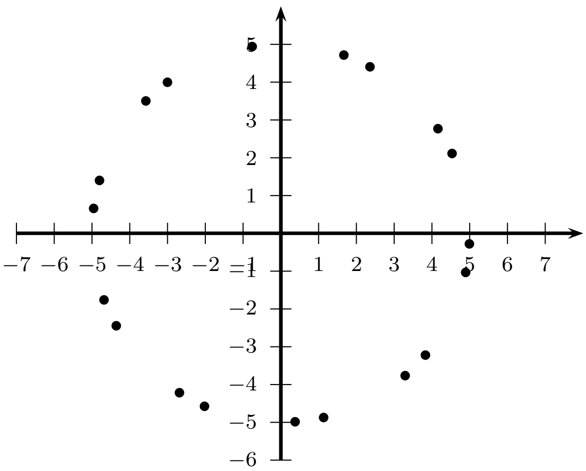
1. (a) *Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.*

   (b) *Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :*

Variables :
i, x, y, t : nombres réels
Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4
Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$
t prend la valeur x
x prend la valeur ....
y prend la valeur ....
Fin Pour

   Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

   (c) *À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant:*



   Identifier les points A_0, A_1 et A_2.
   Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. *Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.*

   Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n.

   (a) *Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?*

   (b) *On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.*
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

   (c) *Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$.*

   (d) *Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.*

   (e) *Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.*
   Représenter θ sur la figure précédente .
   Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

Exercice 2 (Asie juin 2015)
Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) *Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation*

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   (b) *Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.*

2. *Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.*

3. *Démontrer les égalités suivantes:*

   (a) *$j^3 = 1$;*

   (b) *$j^2 = -1 - j$.*

4. *On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, j$ et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.*

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$. On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. *En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité :* $a - c = j(c - b)$.

2. *En déduire que* $AC = BC$.

3. *Démontrer l'égalité :* $a - b = j^2(b - c)$.

4. *En déduire que le triangle ABC est équilatéral.*

Exercice 3 (Antilles Guyane juin 2016)
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. *On note* $\mathcal{C}$ *l'ensemble des points* M *du plan d'affixe* z *tels que* $|z - 2| = 1$.

1. *Justifier que* $\mathcal{C}$ *est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.*

2. *Soit* a *un nombre réel. On appelle* $\mathcal{D}$ *la droite d'équation* $y = ax$.

   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *en fonction des valeurs du réel* a.

Exercice 4 (Pondichéry avril 2017)
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

1. *On considère l'équation*

   $$(E) : \qquad z^2 - 6z + c = 0$$

   où c *est un réel strictement supérieur à 9.*

   (a) *Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.*
   (b) *Justifier que les solutions de (E) sont* $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ *et* $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$.

2. *On note A et B les points d'affixes respectives* z_A *et* z_B. *Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.*

3. *Démontrer qu'il existe une valeur du réel* c *pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.*

Convergence de suites

Exercice 5 (Pondichéry avril 2015)
Partie A
Soit (u_n) *la suite définie par son premier terme* u_0 *et, pour tout entier naturel* n, *par la relation*

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. *Démontrer que, la suite* (v_n) *est géométrique de raison* a.

2. *En déduire que si* a *appartient à* $]-1\ ;\ 1[$, *alors* (u_n) *a pour limite* $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. *Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?*
2. *Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.*
   (a) *Justifier que, pour tout entier naturel n,* $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
   (b) *Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).*
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   (c) *La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.*

Exercice 6 (Amérique du sud novembre 2015)

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante : en 2010, la population compte 90 *millions de ruraux et* 30 *millions de citadins ; chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ; chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.*

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n *la population en zone rurale, en l'année* $2010 + n$*, exprimée en millions d'habitants ;*
- v_n *la population en ville, en l'année* $2010 + n$*, exprimée en millions d'habitants.*

On a donc $u_0 = 90$ *et* $v_0 = 30$.

Partie A

1. *Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.*
2. *On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).*
   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	*n*	*Population en zone rurale*	*Population en ville*
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
	...	...	...
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. *Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?*

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. (a) *Démontrer par récurrence que la suite* (u_n) *est décroissante.*
   (b) *On admet que* u_n *est positif pour tout entier naturel* n.
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) *?*

2. *On considère la suite* (w_n)*, définie par :* $w_n = u_n - 40$*, pour tout* $n \geqslant 0$.

   (a) *Démontrer que* (w_n) *est une suite géométrique de raison* $0,85$.

(b) *En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.*

(c) *Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.*

3. *Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question* **3.** *de la* **partie A**.

4. *On considère l'algorithme suivant :*

Entrée :	*n et u sont des nombres*
Initialisation :	*n prend la valeur 0*
	u prend la valeur 90
Traitement :	*Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire*
	n prend la valeur $n + 1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	*Afficher n*

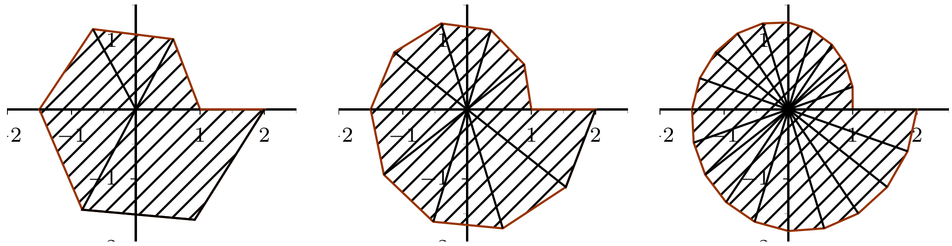
(a) *Que fait cet algorithme ?*

(b) *Quelle valeur affiche-t-il ?*

Exercice 7 (Centres étrangers juin 2016)
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ et on note M_k le point d'affixe z_k.
Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.

$n = 6$ $\qquad$ $n = 10$ $\qquad$ $n = 20$



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leqslant k \leqslant 6$, on a $z_k = \left(1 + \dfrac{k}{6}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$.

1. *Déterminer la forme algébrique de z_1.*

2. *Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.*

3. *Calculer la longueur de la hauteur issue de* M_1 *dans le triangle* OM_0M_1 *puis établir que l'aire de ce triangle est égale à* $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n *est un entier supérieur ou égal à 2.*

1. *Pour tout entier* k *tel que* $0 \leqslant k \leqslant n$, *déterminer la longueur* OM_k.
2. *Pour* k *entier tel que* $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *déterminer une mesure des angles* $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_k}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\ ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
3. *Pour* k *entier tel que* $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *démontrer que la longueur de la hauteur issue de* M_{k+1} *dans le triangle* OM_kM_{k+1} *est égale à* $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
4. *On admet que l'aire du triangle* OM_kM_{k+1} *est égale à* $a_k = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$ *et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à* $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$.

   L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n *lorsqu'on entre l'entier* n :

VARIABLES	*A est un nombre réel*
	k est un entier
	n est un entier
TRAITEMENT	*Lire la valeur de n*
	A prend la valeur 0
	Pour k allant de 0 à n-1
	A prend la valeur $A + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) \times \left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)$
	Fin Pour
SORTIE	*Afficher A*

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
A	*0,323*	*0,711*	*1,170*	*1,705*	*2,322*	*3,027*	*3,826*	*4,726*		

5. *On admet que* $A_2 = 0$ *et que la suite* (A_n) *converge et que* $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{7\pi}{3} \approx 7,3$.

   Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n *tel que* $A_n \geqslant 7,2$. *On ne demande pas de déterminer* n.

L1	*VARIABLES :*	*A est un nombre réel*
L2		*k est un entier*
L3		*n est un entier*
L4	*TRAITEMENT :*	*n prend la valeur 2*
L5		*A prend la valeur 0*
L6		***Tant que*** *............*
L7		*n prend la valeur* $n+1$
L8		*A prend la valeur 0*
L9		*Pour k allant de 0 à* $n-1$
L10		*A prend la valeur* $A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
L12		*Fin Tant que*
L13	***SORTIE :***	***Afficher*** *...*

Exercice 8 (Nouvelle Calédonie mars 2017)
On considère la suite (u_n) *définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 0. \end{cases}$$

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite:

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	1/2	0,5
5	2	2/3	0.666,666,667
6	3	3/4	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0.833,333,333
9	6	6/7	0.857,142,857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0.888,888,889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0.909,090,909

Prouver que la suite (u_n) *converge.*

Exercice 9 (Amérique du nord juin 2017)
Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 *est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel*

$n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- *pour tout* $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- *pour tout* $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. *On choisit* $u_0 = 3$. *Déterminer* u_1 *et* u_2.
2. *Pour tout entier* $n > 0$, *on note* $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
   On a en particulier $s_1 = u_0$.
   (a) *Vérifier que pour tout entier* $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ *et* $s_n > 1$.
   (b) *En déduire que pour tout entier* $n > 0$,
   $$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$
   (c) *Montrer que pour tout* $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.
3. *À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme* u_n *pour une valeur de* n *donnée.*
   a. *Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.*
   b. *Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de* u_n *pour différentes valeurs de l'entier* n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

   Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Entrée :	*Saisir* n
	Saisir u
Traitement :	s *prend la valeur* u
	Pour i *allant de* 1 *à* n :
	u *prend la valeur* …
	s *prend la valeur* …
	Fin Pour
Sortie :	*Afficher* u

4. (a) *Justifier que pour tout entier* $n > 0$, $s_n > n$.
   (b) *En déduire la limite de la suite* (s_n) *puis celle de la suite* (u_n).

Probabilités conditionnelles

Exercice 10 (Amérique du nord juin 2016)

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- *96 % de la production journalière est vendable.*
- *La machine A fournit 60 % de la production journalière.*
- *La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.*

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les évènements suivants :
A *: la bille a été fabriquée par la machine A ;*
B *: la bille a été fabriquée par la machine B ;*
V *: la bille est vendable .*

1. *Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.*
2. *Justifier que* $P(B \cap V) = 0,372$ *et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.*
3. *Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.*

   A-t-il raison ?

Exercice 11 (Antilles Guyane juin 2016)
Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication:

- *à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut;*
- *à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.*

On définit les événements suivants:

- *A: l'ampoule provient de la machine A;*
- *B: l'ampoule provient de la machine B;*
- *D: l'ampoule présente un défaut.*

1. *On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.*
   (a) *Construire un arbre pondéré représentant la situation.*
   (b) *Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0.930,5.*
   (c) *L'ampoule tirée est sans défaut.*
   Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. *On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.*

   Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Exercice 12 (Asie juin 2016)
Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à $0,88$; dans la serre B, elle est égale à $0,84$.

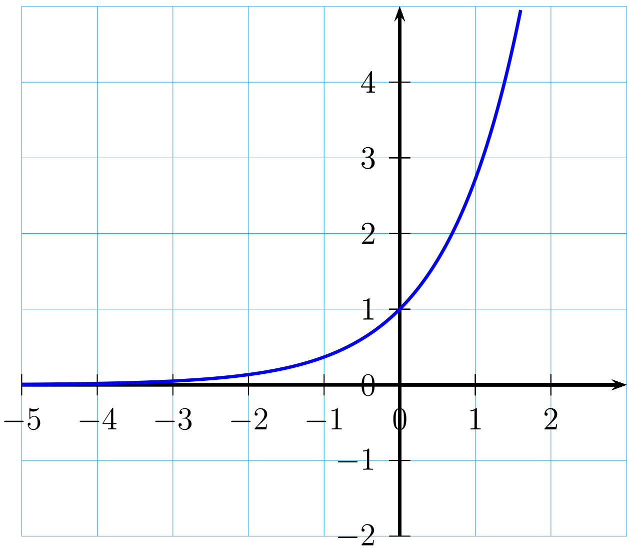
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1:
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à $0,862$.

Proposition 2:
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à $0,439$.

Fonction logarithme népérien

Exercice 13 (Liban mai 2015)
On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. *Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.*

   Démontrer que la droite $\mathcal{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

2. *Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.*

3. *Démontrer cette conjecture.*

Exercice 14 (Nouvelle Calédonie novembre 2015)
Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

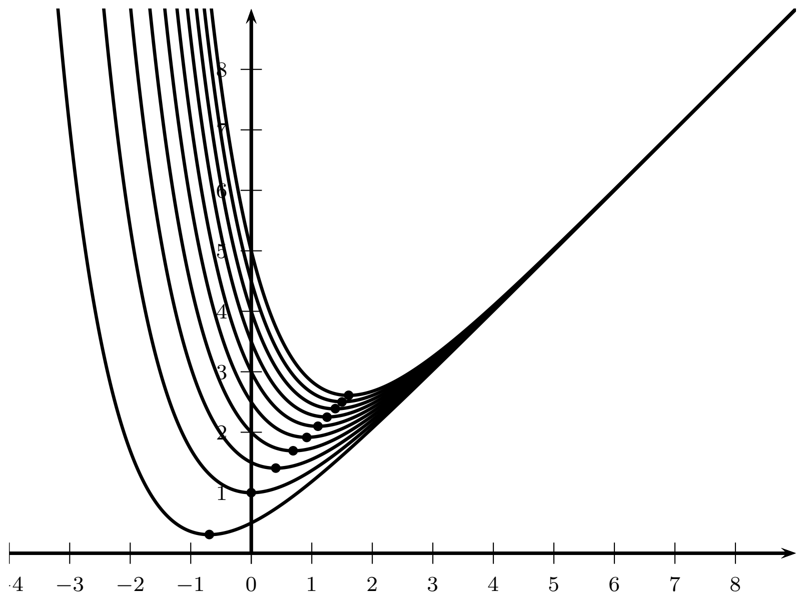
1. *Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.*
2. *Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?*

Exercice 15 (Liban juin 2017)
Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = x + ke^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur $\mathbb{R}$. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe $\mathcal{C}_k$. il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

Exercice 16 (Amérique du nord juin 2015)
Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. *Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*
2. *Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.*

3. *En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.*

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

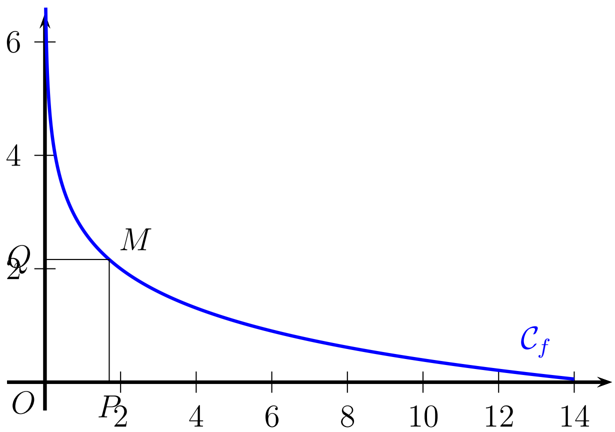
1. *Déterminer la limite de la fonction f en 0.*
2. (a) *Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.*
   (b) *En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$. En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 17 (Pondichéry avril 2016)

Soit f la fonction définie sur]0 ; 14] par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- *L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{C}_f$?*
- *L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ? Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.*

Justifier les réponses.

Exercices classe type bac

Exercice 18 (France juin 2016)
Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.*

2. *Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

3. *Montrer que, pour tout réel x appartenant à [0 ; 1], $f(x)$ appartient à [0 ; 1].*

4. *On considère l'algorithme suivant :*

Variables	*N et A des entiers naturels ;*
Entrée	*Saisir la valeur de A*
Traitement	*N prend la valeur 0* *Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$* *N prend la valeur $N + 1$* *Fin tant que*
Sortie	*Afficher N*

   (a) *Que fait cet algorithme ?*

   (b) *Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.*

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1. *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à [0 ; 1].*

2. *Étudier les variations de la suite (u_n).*

3. *Montrer que la suite (u_n) est convergente.*

4. *On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.*

   En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 19 (Antilles Guyane juin 2016)
Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. *Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.*

   Indication: on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

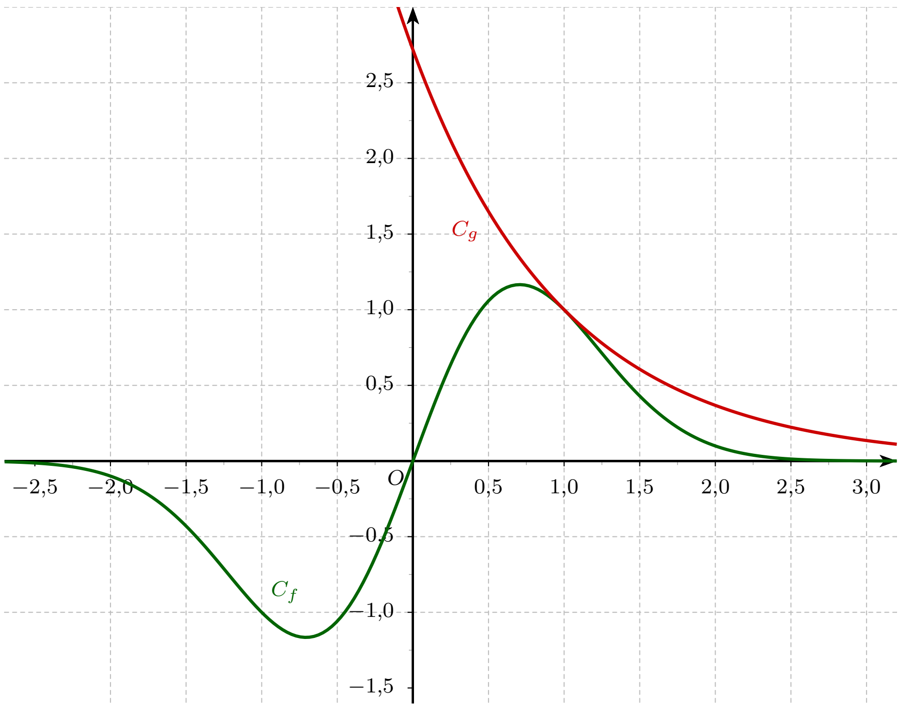
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. (a) *On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.*
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - 2x^2)\,e^{1-x^2}$.

   (b) *En déduire le tableau de variations de la fonction f.*

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. *Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?*

2. *Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.*

3. *Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.*
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

   (a) *Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$. On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.*

   (b) *On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)*

(c) *En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.*

4. (a) *La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?*

   (b) *Montrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.*

   (c) *Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.*

Exercice 20 (Antilles Guyane juin 2015)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$. Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.

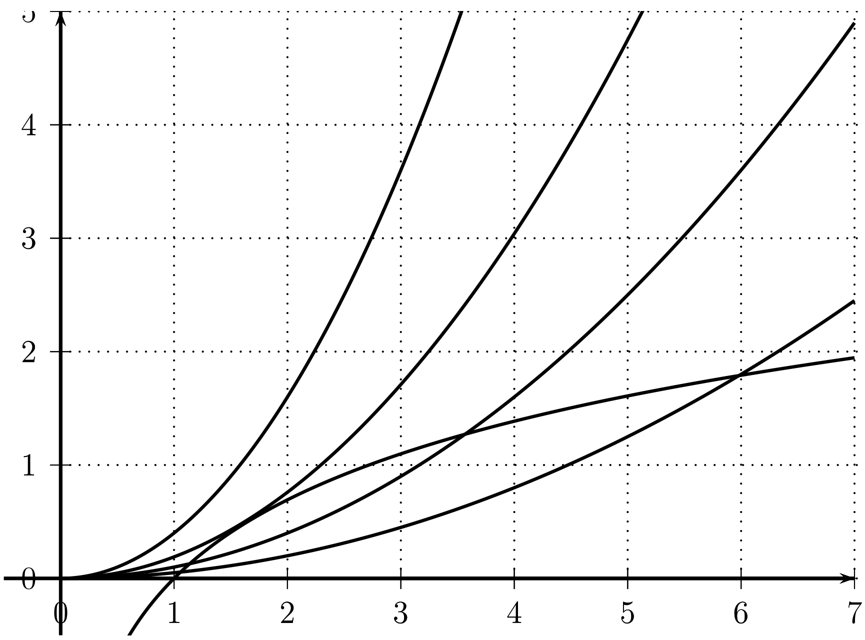
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit les courbes $\mathcal{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1. *Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.*

2. *Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.*



Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h_a(x) = \ln x - ax^2$.

1. *Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.*

2. (a) *On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle. Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous. Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.*

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$h_a(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

   (b) *Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$. On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.*

3. *Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.*

   (a) *Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution. On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}}\ ;\ +\infty\right[$.*

   (b) *Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?*

4. *Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.*

   (a) *Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.*

   (b) *En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$. Justifier.*

5. *Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.*

Exercice 21 (Centres étrangers juin 2015)

Soit a un nombre réel fixé non nul. Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par: $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}$. On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. *Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x$.*

   (a) *Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.*

   (b) *Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.*

   (c) *En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).*

2. *Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.*

   (a) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.*

(b) *Déduire des questions précédentes que la suite* (u_n) *est convergente.*

(c) *Dans le cas où* a *vaut* 0*, donner la limite de la suite* (u_n).

3. *Dans cette question, on suppose que* $a > 0$. *La suite* (u_n) *étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel* n, $u_n \geqslant a$.

   (a) *Démontrer que, pour tout entier naturel* n*, on a :* $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

   (b) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel* n*, on a :*
   $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

   (c) *Déterminer la limite de la suite* (u_n).

4. *Dans cette question, on prend* $a = 0,02$. *L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier* n *tel que* $u_n > M$*, où* M *désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.*

Variables	*n est un entier, u et M sont deux réels*
Initialisation	*u prend la valeur $0,02$* *n prend la valeur 0* *Saisir la valeur de M*
Traitement	*Tant que …* … … *Fin tant que*
Sortie	*Afficher n*

   (a) *Sur la copie, recopier la partie Traitement en la complétant.*

   (b) *À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si* $M = 60$.

Exercice 22 (Antilles Guyane septembre 2012)

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f *définie sur l'intervalle* $]1\ ;\ +\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ *. On a tracé dans un repère orthogonal la courbe* $\mathcal{C}$ *représentative de la fonction* f *ainsi que la droite* $\mathcal{D}$ *d'équation* $y = x$.

1. *Calculer les limites de la fonction* f *en* $+\infty$ *et en* 1.

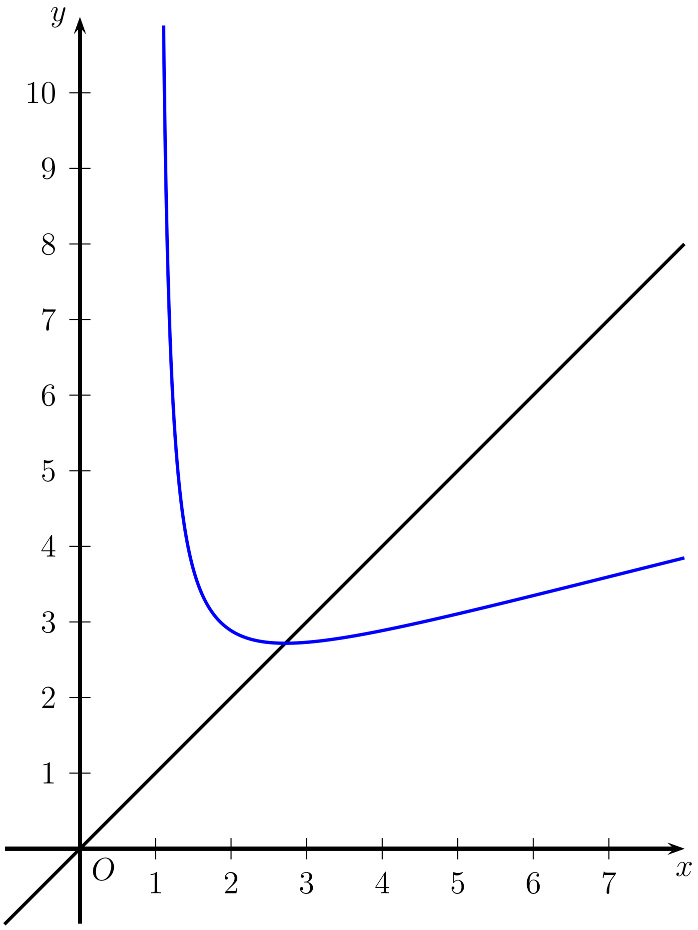
2. *Étudier les variations de la fonction* f *sur l'intervalle* $]1\ ;\ +\infty[$.

3. *En déduire que si* $x \geqslant \mathrm{e}$ *alors* $f(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_0 = 5$ *et pour tout entier naturel* n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. *Sur la figure ci-dessous, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction. Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?*



2. (a) *Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant e$.*
   (b) *Déterminer les variations de la suite (u_n).*
   (c) *En déduire que la suite (u_n) est convergente.*
   (d) *Déterminer sa limite ℓ.*

3. *On donne l'algorithme suivant :*

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X/ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3.106,674,672,8	2.740,652,532,3	2.718,372,634,6	2.718,281,830,01	2.718,281,828,5

Exercice 23 (Amérique du nord mai 2013)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. *On considère l'algorithme suivant :*

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	| Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

   (a) *Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.*

   (b) *Que permet de calculer cet algorithme ?*

   (c) *Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.*

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1.414,2	1.957,1	1.998,6	1.999,9	1.999,9

   Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. (a) *Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 2$.*

   (b) *Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).*

   (c) *Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.*

3. *On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.*

   (a) *Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.*

   (b) *Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.*

   (c) *Déterminer la limite de la suite (u_n).*

(d) *Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1,999$.*

Variables :	*n est un entier naturel*
	u est un réel
Initialisation :	*Affecter à n la valeur 0*
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	
Sortie :	

Calcul intégral

Exercice 24 (Centres étrangers juin 2015)

Les parties A et B sont indépendantes

Le fabricant de cadenas de la marque K désire imprimer un logo pour son entreprise.

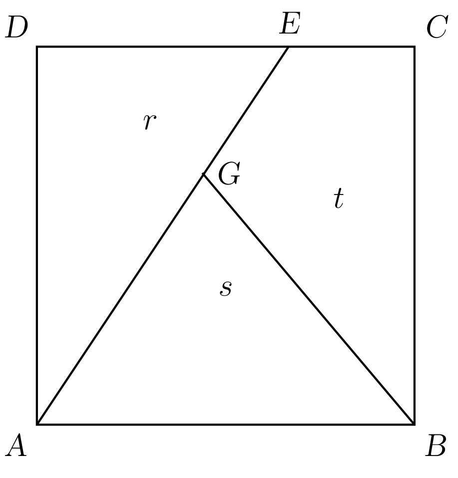
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes:

- *Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :*

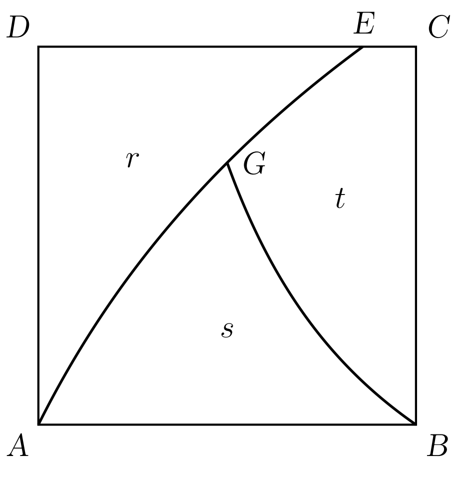
- *une des lignes est le segment [AD] ;*
- *une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;*
- *la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.*

- *Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre $0,3$ et $0,4$, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.*

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous:



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B : étude de la proposition B

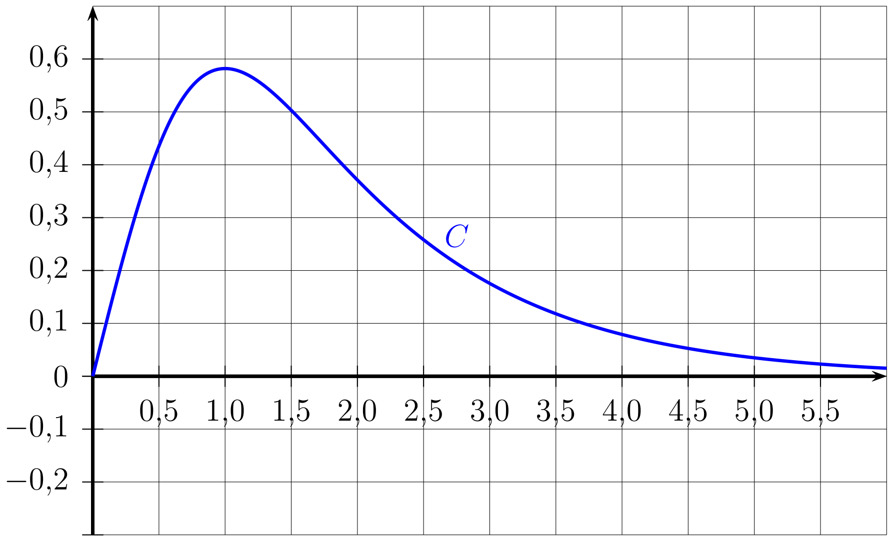
Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes:
- *la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction* f *définie pour tout réel* $x \geqslant 0$ *par :* $f(x) = \ln(2x+1)$ *;*
- *la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction* g *définie pour tout réel* $x > 0$ *par :* $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, *où* k *est un réel positif qui sera déterminé.*

1. (a) *Déterminer l'abscisse du point E.*
   (b) *Déterminer la valeur du réel* k, *sachant que l'abscisse du point G est égale à* $0,5$.
2. (a) *Démontrer que la fonction* f *admet pour primitive la fonction* F *définie pour tout réel* $x \geqslant 0$ *par :*
   $$F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x.$$
   (b) *Démontrer que* $r = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.
3. *Déterminer une primitive* G *de la fonction* g *sur l'intervalle* $]0\ ;\ +\infty[$.
4. *On admet que les résultats précédents permettent d'établir que*
   $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
   La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

Exercice 25 (France septembre 2015)
Soit f *la fonction définie et dérivable sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$ *telle que :*

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - x}$$

On admet que la fonction f *est positive sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $\mathcal{C}$ *la courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthogonal du plan.*
La courbe $\mathcal{C}$ *est représentée ci-dessous:*



Partie A

Soit la suite (I_n) *définie pour tout entier naturel* n *par* $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n *en fonction de* n.

1. *Montrer que la suite* (I_n) *est croissante.*
2. *On admet que pour tout réel* x *de l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.
   (a) *Montrer que, pour tout entier naturel* n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,dx$.
   (b) *Soit* H *la fonction définie et dérivable sur l'intervalle* $[0\ ;\ +\infty[$ *telle que :*
   $$H(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$$
   Déterminer la fonction dérivée H' *de la fonction* H.
   (c) *En déduire que, pour tout entier naturel* n, $I_n \leqslant 2$.
3. *Montrer que la suite* (I_n) *est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.*

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

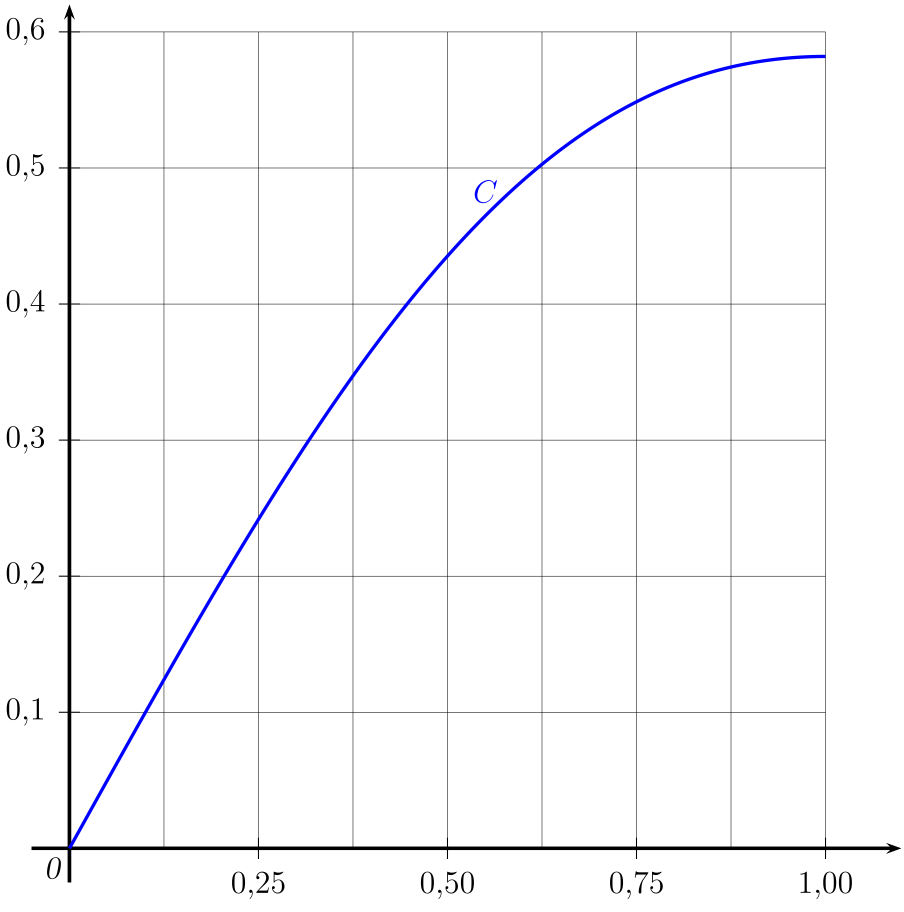
- K *et* i *des entiers naturels,* K *étant non nul;*
- A, x *et* h *des réels.*

Entrée :	*Saisir K entier naturel non nul*
Initialisation	*Affecter à A la valeur 0* *Affecter à x la valeur 0* *Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{K}$*
Traitement	*Pour i variant de 1 à K* *Affecter à A la valeur $A + h \times f(x)$* *Affecter à x la valeur $x + h$* *Fin Pour*
Sortie	*Afficher A*

1. *Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$. Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.*

i	A	x
1		
2		
3		
4		

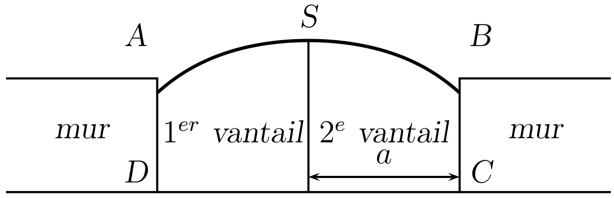
2. *En l'illustrant sur la figure ci-dessous, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.*



3. *Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?*

Exercice 26 (Amérique du nord juin 2017)
Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

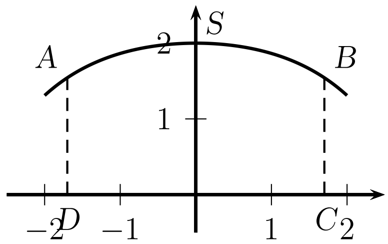
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 2]$ par:

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \qquad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\ ;\ f(-a))$, $(a\ ;\ f(a))$, $(a\ ;\ 0)$ et $(-a\ ;\ 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. *Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?*

2. *On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$:*

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3. *Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.*

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

1. *Justifier que $b = 1$.*

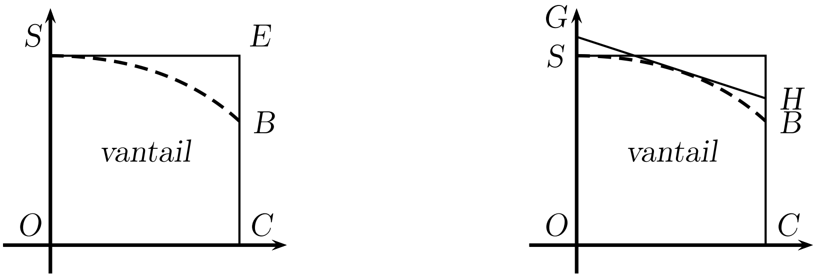
2. *Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.*

3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1,8$ et $b = 1$.

Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle   Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.

Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire } = \frac{b+B}{2} \times h.$$

Fonctions trigonométriques

Exercice 27 (Centres étrangers juin 2017)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.

On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

On a représenté ci-contre un polygone P_6.

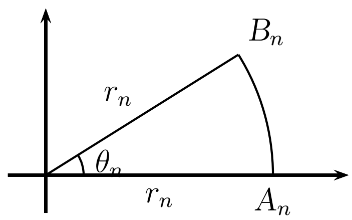
1. *Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\frac{1}{6}$.*

2. *Exprimer en fonction de* r_6 *la hauteur du triangle* OA_6B_6 *issue du sommet* B_6.

3. *En déduire que* $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $\boldsymbol{n \geqslant 4}$

Dans cette partie, on considère le polygone P_n *avec* $n \geqslant 4$, *construit de telle sorte que le point* A_n *soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe* r_n.
On note alors $r_n e^{i\theta_n}$ *l'affixe de* B_n *où* θ_n *est un réel de l'intervalle* $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.



1. *Exprimer en fonction de* r_n *et* θ_n *la hauteur issue de* B_n *dans le triangle* OA_nB_n *puis établir que l'aire de ce triangle est égale à* $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2. *On rappelle que l'aire du polygone* P_n *est égale à 1.*
   Donner, en fonction de n, *une mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{OA_n}\ ,\ \overrightarrow{OB_n}\right)$, *puis démontrer que :*
$$r_n = \sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite $\boldsymbol{(r_n)}$

On considère la fonction f *définie pour tout réel* x *de l'intervalle* $]0\ ;\ \pi[$ *par*
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$
Ainsi, le nombre r_n, *défini dans la partie B pour* $n \geq 4$, *s'exprime à l'aide de la fonction* f *par :* $r_n = \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$
On admet que la fonction f *est strictement croissante sur l'intervalle* $]0\ ;\ \pi[$.

1. *Montrer que la suite* (r_n) *est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout* $n \geqslant 4$, *on a :* $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

2. *En déduire que la suite* (r_n) *converge. On ne demande pas de déterminer sa limite* L, *et on admet dans la suite de l'exercice que* $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. *On considère l'algorithme suivant.*

VARIABLES:	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

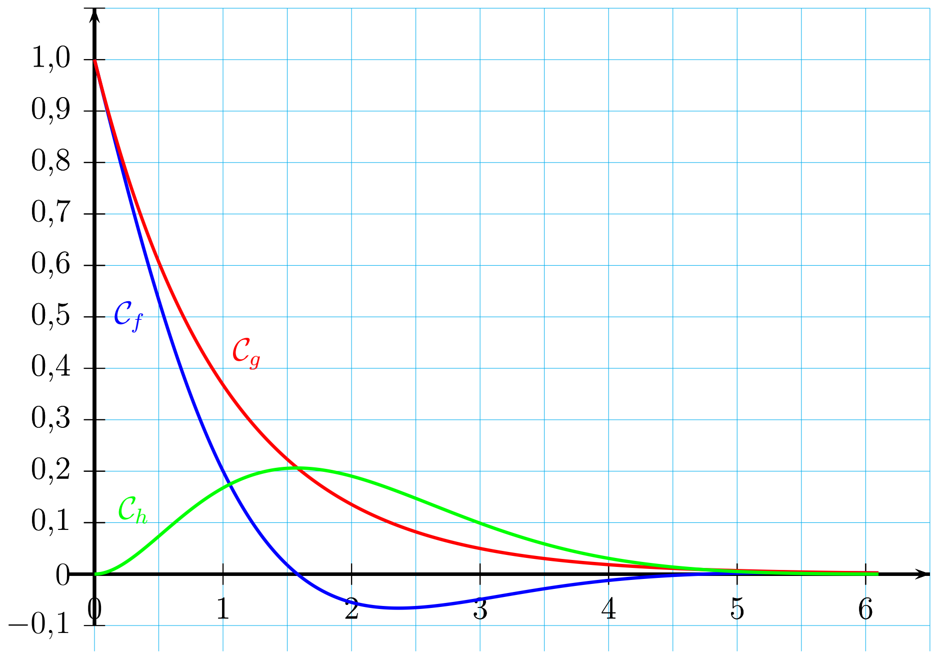
Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

Exercice 28 (Polynésie septembre 2015)
Partie A

1. *Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - i$.*
2. *Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $e^{i\theta}(1-i)$.*
3. *Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.*

Partie B

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par: $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ et $g(x) = e^{-x}$. On définit la fonction h sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$. Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données dans un repère orthogonal.



1. *Conjecturer:*

(a) les limites des fonctions f et g en $+\infty$;

(b) la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;

(c) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.

2. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

(b) Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

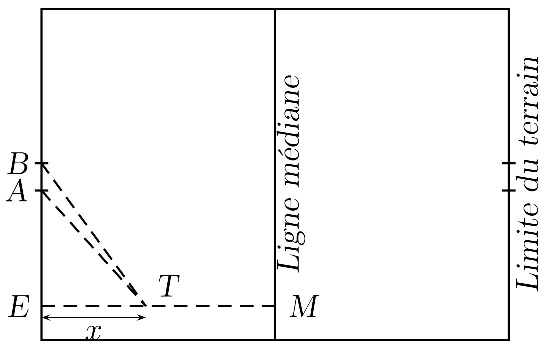
(c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

Exercice 29 (France juin 2016)

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-dessous) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu de dessus



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. *En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer* $\tan\alpha$ *et* $\tan\beta$ *en fonction de* x.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ *par* $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. *Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle* $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. *L'angle* $\widehat{ATB}$ *admet une mesure* γ *appartenant à l'intervalle* $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, *résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.*

   On admet que, pour tous réels a *et* b *de l'intervalle* $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$,

   $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

   Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

4. *L'angle* $\widehat{ATB}$ *est maximum lorsque sa mesure* γ *est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle]0 ; 50] de la fonction* f *définie par :* $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

   Montrer qu'il existe une unique valeur de x *pour laquelle l'angle* $\widehat{ATB}$ *est maximum et déterminer cette valeur de* x *au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle* $\widehat{ATB}$ *à* $0,01$ *radian près.*

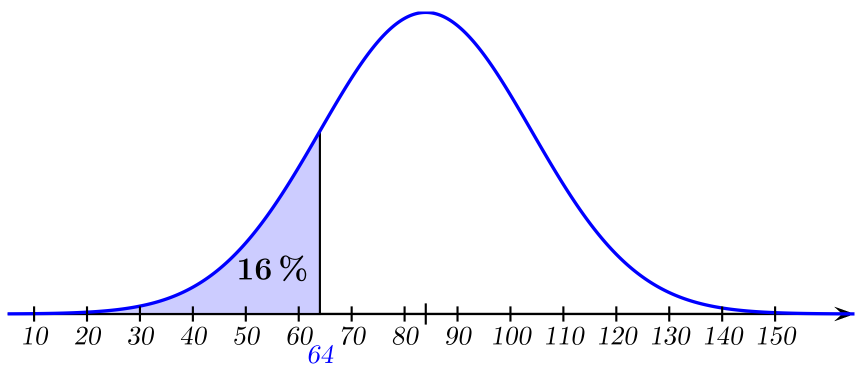
Lois de probabilités continues

Exercice 30 (Pondichéry avril 2015)
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A   Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X *suivant une loi normale* $\mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ *de moyenne* $\mu = 84$ *et d'écart-type* σ. *De plus, on a* $P(X \leqslant 64) = 0,16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X *est donnée ci-dessous.*



1. (a) *En exploitant le graphique, déterminer* $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
   (b) *Quelle valeur approchée entière de* σ *peut-on proposer ?*

2. *On note* Z *la variable aléatoire définie par* $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.
   (a) *Quelle est la loi de probabilité suivie par* Z *?*
   (b) *Justifier que* $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
   (c) *En déduire la valeur de* σ*, arrondie à* 10^{-3}.

3. *Dans cette question, on considère que* $\sigma = 20,1$.
   Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
   (a) *Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.*
   (b) *Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.*

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

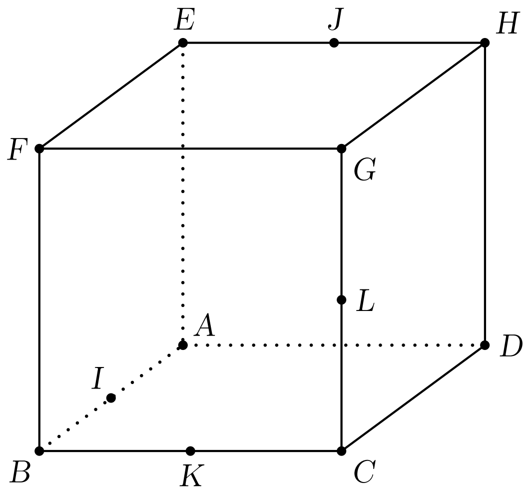
Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années. L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires. Des études statistiques menées ***sur les clients qui prennent l'extension de garantie*** *montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.*

1. *On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).*
   (a) *Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à* 10^{-3}.
   (b) *Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à* 10^{-3}.

2. *L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros,si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.*
   On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y *la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.*
   (a) *Justifier que* Y *prend les valeurs* 65 *et* -334 *puis donner la loi de probabilité de* Y.
   (b) *Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.*

Géométrie dans l'espace

Exercice 31 (Liban mai 2015)
ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG]. On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) *Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).*
   (b) *En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).*
2. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).*
3. *Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.*
4. *Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.*
5. *Calculer le volume du tétraèdre FIJK.*
6. *Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?*

Exercice 32 (France juin 2015)
Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $C(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $D(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$. *Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde. Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde. À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C. On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif. On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées :* $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ *et* $N_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1 + 0,6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) *La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?*
   (b) *La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).*
   Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathcal{P}$.
   (c) *Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathcal{P}$, coupe ce plan au point $E(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.*
   (d) *Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?*
2. (a) *Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.*
   (b) *À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?*

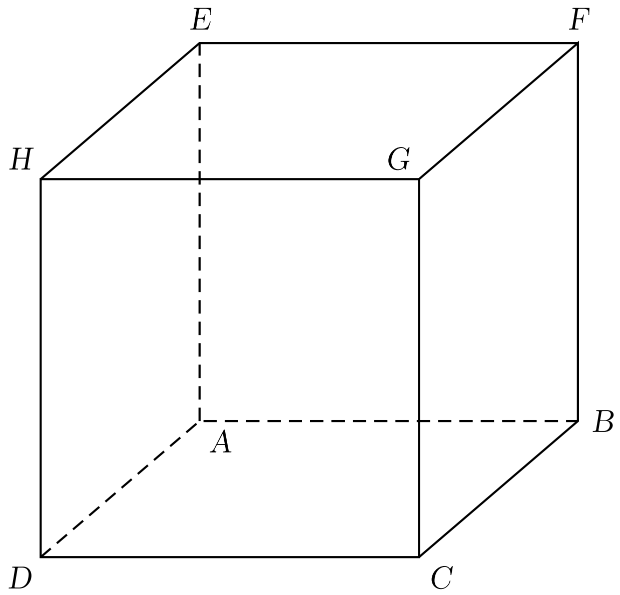
Exercice 33 (France septembre 2015)
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère : les points $A(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $B(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).*
2. (a) *Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.*
   (b) *Montrer que les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.*

Dans la suite la lettre u désigne un nombre réel. On considère le point M de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-2+u\ ;\ 1+u\ ;\ -1-u)$.

3. *Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y-z-3u=0$ est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$ et passe par le point M.*
4. *Montrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont sécants en un point N de coordonnées $(-4+6u\ ;\ 3-3u\ ;\ -1)$.*
5. (a) *Montrer que la droite (MN) est perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.*
   (b) *Existe-t-il une valeur du nombre réel u pour laquelle la droite (MN) est perpendiculaire à la droite (AB) ?*
6. (a) *Exprimer MN^2 en fonction de u.*
   (b) *En déduire la valeur du réel u pour laquelle la distance MN est minimale.*

Exercice 34 (Antilles Guyane septembre 2015)
Soit ABCDEFGH le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A.\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$.

1. (a) *Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & s \\ y & = & 1-s, \\ z & = & 0 \end{array}\right. , \text{ où } s \text{ décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

   (b) *Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées* $(t\ ;\ t\ ;\ t)$ *où* t *est un réel.*

2. *Soit* M *un point quelconque de la droite (DB) et* N *un point quelconque de la droite (AG). Démontrer que la droite* (MN) *est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si* M *et* N *ont pour coordonnées respectives* $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ *et* $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

3. *Soit* s *et* t *deux réels quelconques. On note* $M(s\ ;\ 1-s\ ;\ 0)$ *un point de la droite (DB) et* $N(t\ ;\ t\ ;\ t)$ *un point de la droite (AG).*

   (a) *Montrer que* $MN^2 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

   (b) *En déduire la position des points* M *et* N *pour laquelle la distance* MN *est minimale. Que peut-on dire de la droite* (MN) *dans ce cas ?*

Exercice 35 (Nouvelle Calédonie mars 2016)

Dans le repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k})$*de l'espace, on considère pour tout réel* m, *le plan* P_m *d'équation*

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1. *Pour quelle(s) valeur(s) de* m *le point* $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ *appartient-il au plan* P_m *?*

2. *Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique*

$$(d)\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 12-2t \\ y & = & 9-2t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

3. (a) *Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.*
   (b) *Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.*
   (c) *Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.*

4. *Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que $-10 \leqslant m \leqslant 10$ et $-10 \leqslant m' \leqslant 10$. . On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.*
   (a) *Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.*
   (b) *Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si*

   $$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0.$$

   (c) *On donne l'algorithme suivant :*

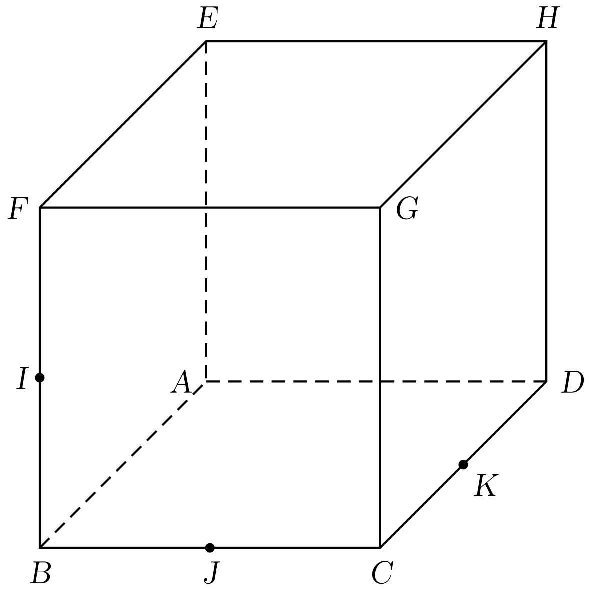
Variables :	m et m' *entiers relatifs*
Traitement :	*Pour m allant de -10 à 10 :*
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$
	Alors Afficher $(m\ ;\ m')$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

   Quel est le rôle de cet algorithme ?

   (d) *Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1) et (5\ ;\ -4)$. Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.*

Exercice 36 (Pondichéry avril 2016)

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1. Le point I est le milieu du segment [BF]. Le point J est le milieu du segment [BC]. Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L. Construire, sur la figure , et en laissant apparents les traits de construction: le point L ; l'intersection $\mathcal{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1. *Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.*
2. (a) *Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).*

   (b) *En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).*
3. *On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.*

   (a) *Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.*

   (b) *Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.*
4. *Démontrer que pour ce point $N\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$:*

   (a) *N appartient au plan (IJK).*

   (b) *La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).*

Exercice 37 (Asie juin 2016)

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de coin de cube, les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OC}\right)$ *soit un repère orthonormé.*

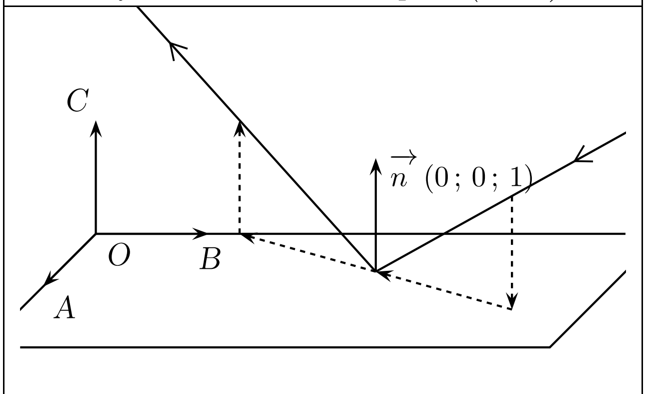
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises):

- *lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur* $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ *est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est* $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ -c)$*;*
- *lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur* $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ *est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est* $\overrightarrow{v}\,(-a\ ;\ b\ ;\ c)$ *;*
- *lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur* $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ *est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est* $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ -b\ ;\ c)$ *;*

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1. Propriété des catadioptres

   En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ *est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.*

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 *de vecteur directeur* $\overrightarrow{v_1}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ *qui vient frapper le plan (OAB) au point* $I_1\,(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$*. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite* d_2 *de vecteur directeur* $\overrightarrow{v_2}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ *et passant par le point* I_1*.*

2. Réflexion de d_2 sur le plan *(OBC)*

(a) *Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.*

(b) *Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.*

(c) *Soit I_2 le point de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.*
Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\ (2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par le point $I_2\,(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

3. Réflexion de d_3 sur le plan *(OAC)*

   Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

   On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. Étude du trajet de la lumière

   On donne le vecteur $\overrightarrow{u}\ (1\ ;\ -2\ ;\ 0)$, et on note $\mathcal{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

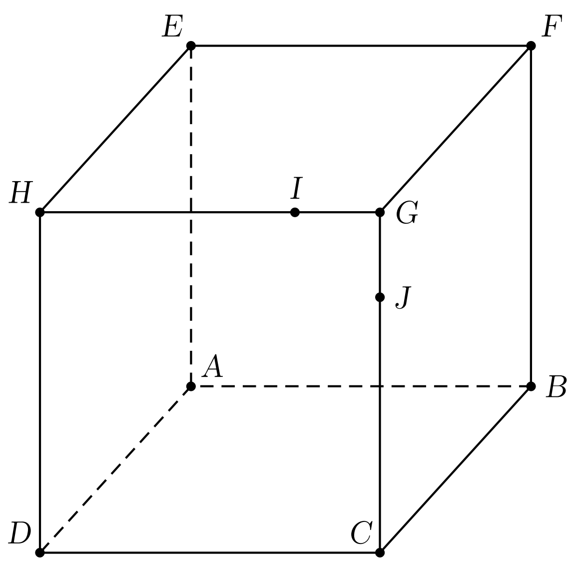
   (a) *Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.*

   (b) *Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan?*

   (c) *Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan?*

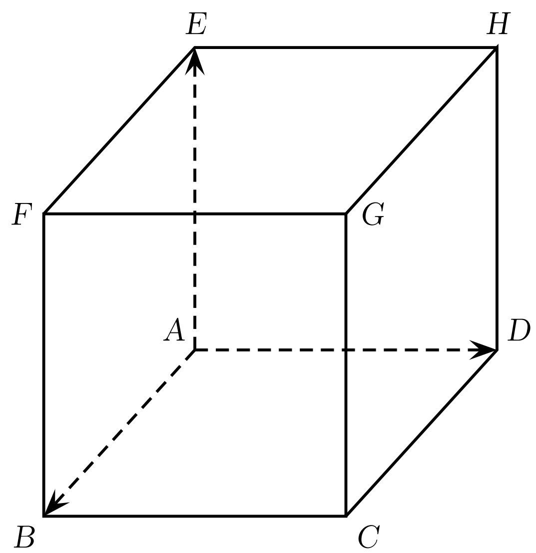
Exercice 38 (Nouvelle Calédonie novembre 2016)
On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.

On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.



1. *Tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].*
2. *Tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).*
3. *Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.*

Exercice 39 (Pondichéry avril 2017)
On considère un cube ABCDEFGH ci-dessous :



L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.
On note $\mathcal{P}$ *le plan d'équation* $x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{3}z - 1 = 0$.
Construire la section du cube par le plan $\mathcal{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

Exercice 40 (Antilles Guyane juin 2017)
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\ )$.
On considère les points $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

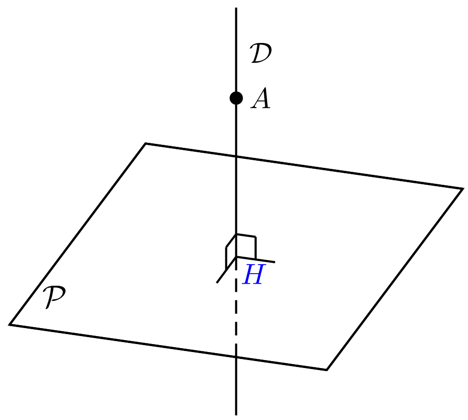
1. (a) *Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.*
   (b) *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.*
   (c) *En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.*
2. *Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.*
   (a) *Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).*
   (b) *Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).*
3. *Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $3x+y-2z+3=0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x-2z+6=0$.*
   (a) *Démontrer que le plan $\mathcal{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.*
   (b) *Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.*
   (c) *Soit la droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est*
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & -4t-3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & t \end{array}\right.$$
   Démontrer que $\mathcal{D}$ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
4. *Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.*

Exercice 41 (France juin 2017)
L'espace est mini d'un repère $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k}\ )$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x-z-3=0$.
On note A le point de coordonnées $(1\ ;\ a\ ;\ a^2)$ où a est un nombre réel.

1. *Justifier que, quelle que soit la valeur de a, le point A n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.*
2. (a) *Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ (de paramètre t) passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.*
   (b) *Soit M un point appartenant à la droite $\mathcal{D}$, associé à la valeur t du paramètre dans la représentation paramétrique précédente.*
   Exprimer la distance AM en fonction du réel t.

On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ et passant par le point A. Le point H est appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ et la distance AH est appelée distance du point A au plan $\mathcal{P}$.



3. *Existe-t-il une valeur de a pour laquelle la distance AH du point A de coordonnées $(1\ ;\ a\ ;\ a^2)$ au plan $\mathcal{P}$ est minimale ? Justifier la réponse.*

Intervalles de fluctuation

Exercice 42 (Liban mai 2015)

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1,200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- *A l'évènement La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A ;*
- *B l'évènement La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B ;*
- *V l'évènement La personne interrogée dit la vérité*

1. *Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.*
2. (a) *Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.*
   (b) *Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.*
3. *Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.*

4. *L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :*

52,9 % des électeurs voteraient pour le candidat A.*   **estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1,200 personnes.*

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

5. *Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est* $0,4$.

   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.

   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

Exercice 43 (Polynésie septembre 2015)
Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\text{ng.mL}^{-1}\right)$, *d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.*

1. *Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire* T *qui suit la loi normale d'espérance* $\mu = 40$ *et d'écart-type* $\sigma = 8$.

   On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

   Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 ng.mL^{-1}.

2. *Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 ng.mL*$^{-1}$ *et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 ng.mL*$^{-1}$.

   On appelle T' *la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en ng.mL*$^{-1}$ *chez une personne atteinte par la maladie étudiée.*

   On admet que T' *suit la loi normale d'espérance* μ' *et d'écart-type* σ'.

   Préciser la valeur de μ' *et déterminer la valeur de* σ'.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1}.

Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- *M l'évènement le patient est atteint par la maladie étudiée ;*
- *D l'évènement le patient a un dépistage positif*

On admet que :

- *82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;*
- *73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.*

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. *Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de $0,325$.*
2. *Calculer $P_{\overline{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.*
3. *Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez- vous ?*

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.
Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.
Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.
On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.
Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.
Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

Exercice 44 (Métropole juin 2016)
Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
On note :

A l'évènement le composant provient de la chaîne A

B l'évènement le composant provient de la chaîne B

S l'évènement le composant est sans défaut

1. *Montrer que la probabilité de l'évènement* S *est* $P(S) = 0,89$.

2. *Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à* 10^{-2} *près.*

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p *de composants sans défaut.*

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 *composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.*

Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de $0,92$.

1. *Déterminer un intervalle de confiance de la proportion* p *au niveau de confiance de 95 %.*

2. *Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de* $0,02$ *?*

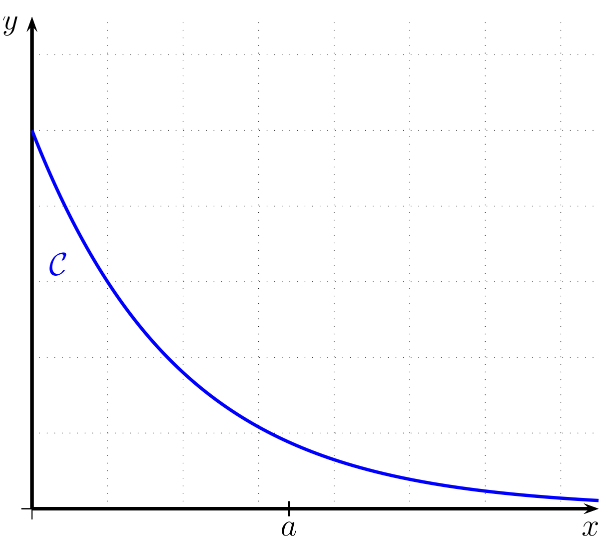
Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T *qui suit la loi exponentielle de paramètre* λ *(où* λ *est un nombre réel strictement positif).*

On note f *la fonction densité associée à la variable aléatoire* T*. On rappelle que :*

- *pour tout nombre réel* $x \geqslant 0,\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- *pour tout nombre réel* $a \geqslant 0,\ p(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$.

1. *La courbe représentative* $\mathcal{C}$ *de la fonction* f *est donnée ci-dessous.*



(a) *Interpréter graphiquement* $P(T \leqslant a)$ *où* $a > 0$.

(b) *Montrer que pour tout nombre réel* $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

(c) *En déduire que* $\lim_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2. *On suppose que* $P(T \leqslant 7) = 0,5$. *Déterminer* λ *à* 10^{-3} *près.*

3. *Dans cette question on prend* $\lambda = 0,099$ *et on arrondit les résultats des probabilités au centième.*

   (a) *On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.*
   Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

   (b) *On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.*
   Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

   (c) *Donner l'espérance mathématique* $E(T)$ *de la variable aléatoire* T *à l'unité près.*
   Interpréter ce résultat.

Exercice 45 (Pondichéry avril 2017)
Les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie Choc'o fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.
La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication:

- *la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à 0,98.*
- *la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est 0,95.*

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on note :
A l' évènement: la tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A ;
C l'évènement : la tablette de chocolat est commercialisable
On note x *la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.*

1. *Montrer que* $P(C) = 0,03x + 0,95$.

2. *À l'issue de la production, on constate que 96 % des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable.*

   Justifier que la probabilité que la tablette provienne de la chaîne B est deux fois égale à celle que la tablette provienne de la chaîne A.

Partie B

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. Sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. *La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.*

   Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

2. *Calculer $P(Z > 2)$.*

3. *Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?*

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. *Calculer $P(83 < X < 87)$.*

   Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

2. *Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que:*

$$P(85 - a < X < 85 + a) = 0,9.$$

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. *La chocolaterie vend un lot de 10,000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle [81,7 ; 88,3].*

   Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.

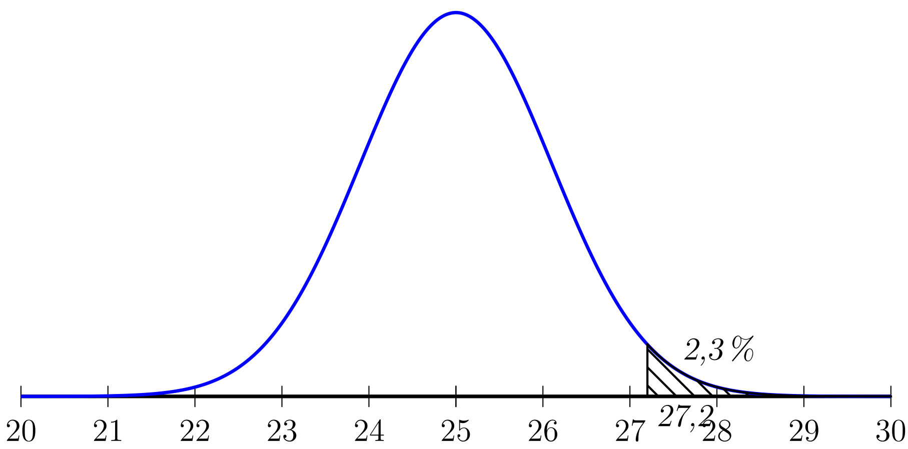
   Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

Exercice 46 (Antilles Guyane juin 2017)
Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre 22,8 μm et 27,2 μm.

La fonction de densité de probabilité de X est représentée ci-dessous. On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.



1. (a) *Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.*
   (b) *Justifier que 1,1 est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.*
   (c) *Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.*

2. *Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98 % de pièces conformes.*

   La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ μm et d'écart-type σ_2.

   (a) *En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.*
   (b) *Un contrôle qualité évalue le nouveau procédé; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 ne sont pas conformes.*
   Au seuil de 95 %, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?