Corrigé variations

Exercice 1

L'intérêt de cet exercice est de réfléchir à quelle expression d'une fonction est la plus adaptée selon les questions

1) $\dfrac{(x-1)^3-2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1-2}{(x-2)^2}=\dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{(x-2)^2}=f(x)$.

$ax+b+\dfrac{c}{x-2}-\dfrac{d}{(x-2)^2}=\dfrac{ax(x-2)^2+b(x-2)^2+c(x-2)-d}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{ax^3+(b-4a)x^2+(4a-4b+c)x+4b-2c-d}{(x-2)^2}$. On procède par identification et on obtient les équations suivantes : a = 1

et b – 4 a = - 3

et 4a – 4b + c = 3

et 4b – 2c – d = - 3

on résout et on trouve : a = 1 , b = 1 , c = 3 et d = 1

d'où la conclusion : f(x) = $x+1+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

2) Commençons par déterminer l'ensemble de définition de f : la valeur interdite est 2 donc Df = $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Etudions les limites en l'infini

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{(x-2)^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x+1=-\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Etudions les limites en 2 :

$\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)^2=\lim\limits_{x\to2^-}(x-2)^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^3-2=-1$ d'où

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=-\infty$

3) <u>Etudions l'intersection de la courbe avec la droite d'équation y = x + 1</u>

f(x) = x + 1 équivaut aux lignes suivantes :

$x+1+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}=x+1$

$\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}=0$

$\dfrac{3(x-2)-1}{(x-2)^2}=0$

$\dfrac{3x-3}{(x-2)^2}=0$

3x – 3 = 0

x = 1

Il y a donc un seul point d'intersection entre cette droite et la courbe de f : A(1 ; - 2)

<u>Etudions maintenant les intersections avec l'axe des abscisses</u> :

rappel : axe des abscisses : y = 0 et axe des ordonnées : x = 0

f(x) = 0 équivaut aux lignes suivantes :

$\dfrac{(x-1)^3-2}{(x-2)^2}=0$

$(x-1)^3-2=0$

$x-1=2^{\frac{1}{3}}$

$x=1+2^{\frac{1}{3}}$

donc le point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses est B($1+2^{\frac{1}{3}}$; 0)
<u>Etudions maintenant l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées</u> :

x = 0 et f(0) = $-\frac{3}{4}$

donc le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées est le point C(0 ; $-\frac{3}{4}$)

<u>Exercice 2</u>

On a f(x) = $\sqrt{x^2+4x}+x+1$

1) La fonction f existe si et seulement si $x^2+4x\geq 0$ c'est-à-dire x (x + 4) ≥ 0 . Le domaine de définition est donc $\left]-\infty;-4\right]\cup\left[0;+\infty\right[$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

   $\lim\limits_{x\to-4}f(x)=f(-4)=-3$

   $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$

   La limite en $-\infty$ conduit par calcul direct à une forme indéterminée , on utilise donc la forme conjuguée :

   $$\sqrt{x^2+4x}+x+1=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}+x+1\right)\left(\sqrt{x^2+4x}-(x+1)\right)}{\sqrt{x^2+4x}-x-1}=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x}-x-1}$$

   on a encore une forme indéterminée donc on factorise par le plus haut degré :

   $$\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+4x}-x-1}=\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1-\frac{1}{x}}$$

   on rappelle que $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ car ici x < 0 .

   On étudie la limite de chaque partie et on obtient :

   $\lim\limits_{x\to-\infty}2-\frac{1}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{4}{x}}=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}-1-\frac{1}{x}=-1$ d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$
3) Calculons f(x) – 2x – 3 = $\sqrt{x^2+4x}+x+1-2x-3=\sqrt{x^2+4x}-x-2$

   $=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}-x-2\right)\left(\sqrt{x^2+4x}+x+2\right)}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}$.

   Calculons la limite de cette expression $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}+x+2=+\infty$ donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-(2x+3)=0$

   Par contre , $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x}-x-2=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x-2=+\infty$.

On en déduit que la courbe de la fonction f admet la droite d'équation y = 2x + 3 comme asymptote oblique en + ∞ .

4) Rappelons qu'on va étudier les variations uniquement sur le domaine de définition :

f '(x) = $\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}+1=\dfrac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{\sqrt{x^2+4x}}$ > 0 sur $[0;+\infty[$. Donc f croissante sur $[0;+\infty[$.

Utilisons encore une fois la forme conjuguée :

f '(x) = $\dfrac{4}{\left(x+2-\sqrt{x^2+4x}\right)\sqrt{x^2+4x}}<0$ sur $]-\infty;-4]$ et f est décroissante sur $]-\infty;-4]$