Etudes de signes

Des signes immédiats

Dans l'ensemble des réels, une puissance paire est toujours positive
Une racine est positive sur son ensemble de définition

Exemples

$(x+7)^8$ est positif ou nul pour tout x

$\sqrt{x-2} \geq 0$ sur $[2;+\infty[$

$\dfrac{\sqrt{x+8}}{(x-7)^2} \geq 0$ sur $[-8;+\infty[\setminus \{7\}$

Polynômes du premier degré

On rappelle qu'un polynôme de la forme ax + b s'annule en x = $-\dfrac{b}{a}$ et est du signe de a si x > $-\dfrac{b}{a}$

Exemple

- x + 7 > 0 sur $]-\infty;7]$

Second degré et plus

On va rappeler les principales méthodes pour déterminer les racines et le signe d'un polynôme de second degré

Un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines

Cas où l'on peut factoriser

Lorsqu'il y a un (ou plusieurs) facteur commun, commencer par factoriser puis s'il y a deux racines, on applique la règle précédente et s'il y a plus de deux racines, on utilise un tableau de signes

(Il existe une fiche méthode qui rappelle en détails le principe des tableaux de signes sur ce site : section seconde, exercices facultatifs, ordre et valeur absolue, fiche méthode inéquations)

Exemple 1

$f(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

Il y a deux racines 0 et 2, donc f est du signe de 3, c'est-à-dire positif sur $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$

Donc $f(x) \geq 0$ sur $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$

Etudes de signes

Exemple 2

f(x) = $\dfrac{(x-8)(-2x+7)}{(x-5)}$. On dresse le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		5		8		$+\infty$
x - 8		-		-		-	0	+	
- 2x + 7		+	0	-		-		-	
x - 5		-		-	0	+		+	
$\dfrac{(x-8)(-2x+7)}{(x-5)}$		+	0	-	$\Vert$	+	0	-	

Cas où l'on peut utiliser une identité remarquable

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Exemple

f(x) = x^2 - 4x + 4 = $(x-2)^2 \geq 0$ pour tout réel x

Cas où l'on calcule les racines avec le discriminant

Soit P(x) = $ax^2 + bx + c$

On appelle discriminant le réel : $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$: Les racines de P sont alors : x' = $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et x'' = $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

La factorisation de P est P(x) = a (x – x') (x – x'')

P est du signe de a à l'extérieur des racines

Si $\Delta < 0$: P est du signe de a

Si $\Delta = 0$: P(x) = a $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

Exemple 1

Etudions le signe de f(x) = $x^2 - 3x + 2$.

$\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$; il y a donc deux racines : 2 et 1 donc f(x) = (x – 1) (x – 2) et f(x) > 0 sur $]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$

Exemple 2

Etudions le signe de f(x) = $-2x^2 + 4x - 4$

$\Delta = 16 - 32 = -16 < 0$ donc f est du signe de – 2 donc f(x) < 0 pour tout x.

Etudes de signes

Une propriété bien pratique

Si a + b = S et ab = P alors a et b sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Exemple

Déterminer a et b tels que a + b = 3 et ab = 2

On résout $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Delta = 1$ donc a = 1 et b = 2 .

Se ramener au second degré

Toujours vérifier si un changement de variable ne permet pas de retrouver un polynôme du second degré

Exemple 1

Etude du signe de $f(x) = x^4 + 3x^2 + 12$. On pose $X = x^2$ et on a : $f(X) = X^2 + 3X + 12$

$\Delta = 9 - 48 = -39 < 0$ donc f du signe de 1 donc $f(x) > 0$

Exemple 2

Etude du signe de $f(x) = \cos^2 x - 3\cos x + 2$.

On pose $X = \cos x$ on obtient $f(X) = X^2 - 3X + 2$

$\Delta = 9 - 8 = 1$ donc deux racines : 1 et 2 d'où : $f(X) = (X - 1)(X - 2)$

Autrement dit : $f(x) = (\cos x - 1)(\cos x - 2)$

On sait que : $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $\cos x - 1 \leq 0$ et $\cos x - 2 \leq -1 \leq 0$ donc $f(x) \geq 0$

Quand ces méthodes ne fonctionnent pas

- Dans ce cas là, il faut faire une étude de variations de la fonction et utiliser la lecture du tableau de variations.

Exemple

Etude du signe de $f(x) = x - \sin x$

On calcule la dérivée : $f'(x) = 1 - \cos x$

On sait que : $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $1 - \cos x \geq 0$ et f est croissante

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

En lisant le tableau de variations, on voit que $f(x) > 0$ dès que $x > 0$

Etudes de signes

Exercices

Exercice 1

Donner les racines, factoriser et étudier le signe de chaque polynôme :

1) $x^2 + 3x - 40$
2) $-x^2 + 2x + 48$
3) $2x^2 - 4x - 100$
4) $-x^2 + 4x - 4$
5) $3x^2 - 5x + 25$
6) $2x^2 + 3x + 5$
7) $x^4 + 2x^2 - 3$
8) $2x^4 - 3x^2 + 7$

Exercice 2

Donner le signe de f sur l'intervalle donné

1) f(x) = sin x sur $[-\pi;\pi]$
2) f(x) = $-\sqrt{1-x}$ sur $]-\infty;1]$
3) f(x) = x cos x sur $[-\pi;\pi]$
4) f(x) = $x+\sqrt{x+1}$ sur $[1;+\infty[$
5) f(x) = $x+\sqrt{x^2-4}$ sur $]-\infty;-2]$