Géométrie analytique

Dans cette fiche, on va rappeler des méthodes de géométrie analytique qui s'appliquent en géométrie plane mais qu'on utilise aussi en géométrie dans l'espace dans certains cas .
Il faut donc bien faire attention à ce qui n'est valable que dans le plan .

Colinéarité et parallélisme

Dans le plan ou dans l'espace

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement ils sont proportionnels c'est-à-dire $\vec{u} = k\vec{v}$
Dans le cas d'un plan rapporté à un repère , cela signifie que les coordonnées sont proportionnelles .

Exemple

$\vec{u}(5;-2;7)$ et $\vec{v}(10;-4;14)$ sont colinéaires mais $\vec{u}(5;-2;7)$ et $\vec{v}(12;-4;14)$ ne le sont pas .

Uniquement dans le plan

On dispose de la condition de colinéarité , appelée aussi déterminant de deux vecteurs

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ avec $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$

Exemple

On donne $\vec{u}(5;-2)$ et $\vec{v}(7;5)$. Sont-ils colinéaires ?

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5\times 5 - (-2)\times 7 = 39 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Produit scalaire

Tout ce paragraphe est valable dans le plan et dans l'espace

On se place dans un repère orthonormé

Définition

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$

Remarque : le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais un réel !

Avec des coordonnées

Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors le produit scalaire de ces deux vecteurs est

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Des formules utiles

$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Vocabulaire particulier d'une droite dans le plan

Uniquement valable dans le plan pour tout le paragraphe : en fait , il n'y a pas d'équation cartésienne de droite dans l'espace .

Soit une droite d d'équation : ax + by + c = 0

Un vecteur directeur (c'est-à-dire porté par la droite) de cette droite a pour coordonnées : (- b ; a) :

Un vecteur normal (c'est-à-dire perpendiculaire à la droite) de cette droite a pour coordonnées (a ; b)

On appelle équation réduite d'une droite une équation de la forme : y = mx + p avec m coefficient directeur et p ordonnée à l'origine .

Méthodes pour déterminer une équation de droite dans le plan

Uniquement valable dans le plan

- *On connaît deux points de la droite : A et B*

On a alors plusieurs techniques à notre disposition :

- *On dit qu'un point M est sur la droite si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires*

Exemple

Déterminer l'équation de la droite passant par A (2 ; 5) et B (3 ; 7)

Soit M(x ; y) un point de la droite.

$\overrightarrow{AM}(x-2; y-5)$ et $\overrightarrow{AB}(1;2)$ sont colinéaires donc 2(x – 2) – (y – 5) = 0

D'où l'équation de (AB) : 2x – y + 1 = 0

- *On utilise la définition du coefficient directeur : m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$*

Exemple

Déterminer l'équation de la droite passant par A (2 ; 5) et B (3 ; 7)

On a : m = $\frac{7-5}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$. Donc l'équation de la droite (AB) est : y = 2x + b

Trouvons b : A est sur la droite donc : 5 = 2(2) + b donc b = 1 et l'équation de la droite est y = 2x + 1

- *On résout un système en remplaçant x et y par les coordonnées de A et B dans y = ax + b*

Exemple

Déterminer l'équation de la droite passant par A (2 ; 5) et B (3 ; 7)

A est sur la droite donc : 5 = 2a + b

B est sur la droite donc : 7 = 3a + b

On résout le système ainsi obtenu : commençons par soustraire : - 2 = - a donc a = 2 et rapidement b = 1

L'équation de la droite est donc y = 2x + 1

- *Droite perpendiculaire à une autre donnée*

  On utilise le produit scalaire

Exemple

Déterminer l'équation de la droite d passant par A (2 ; 8) et perpendiculaire à (BC) avec B (2 ; 5) et C (4 ; 3)

Soit M(x ; y) un point de d alors $\overrightarrow{AM}(x-2; y-8)$ et $\overrightarrow{BC}(2;-2)$ sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et 2(x – 2) – 2 (y – 8) = 0 ce qui donne : 2x – 2y + 12 = 0 ou après simplification : x – y + 6 = 0

Lieux géométriques

- *Dans le plan*

Un cercle de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M tels que IM = R

L'équation d'un cercle de centre I et de rayon R est : $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2 = R^2$

Un cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

La médiatrice de [AB] est l'ensemble des points M tels que MA = MB.

- *Dans l'espace*

Une sphère de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M tels que IM = R

L'équation d'une sphère de centre I et de rayon R est : $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2+(z-z_I)^2 = R^2$

Une sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Le plan médiateur de [AB] est l'ensemble des points M tels que MA = MB.

Exercices

Exercice 1

Les vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ? colinéaires ? sécants ?

1) $\vec{u}(5;3;-2)$ et $\vec{v}(-3;5;8)$
2) $\vec{u}(5;4;-2)$ et $\vec{v}(-15;-12;6)$
3) $\vec{u}(0;3;-2)$ et $\vec{v}(-3;2;3)$
4) $\vec{u}(15;3;-2)$ et $\vec{v}(-3;5;8)$

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé . Donner pour chaque droite son vecteur directeur et son vecteur normal .

1) D : $2x-4y+7=0$
2) D : $4y+8=0$
3) D : $-2x+9y+11=0$
4) D : $3x-7=0$

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé . Donner pour chaque droite une équation cartésienne :

1) (AB) avec A(5 ;-3) et B(2 ;7)
2) (AB) avec A(8 ;3) de coefficient directeur 3
3) (AB) avec A(5 ;9) de vecteur normal (2 ;7)
4) (AB) orthogonale à (AC) avec A(1 ;3) et C(2 ;0)
5) La médiatrice de [AB] avec A(1 ;3) et B(-5 ;0)

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé . Donner pour chaque cercle une équation cartésienne

1) De centre A(2 ;9) et de rayon 3
2) De diamètre [AB] avec A(3 ;0) et B(1 ;8)