Corrigé lieux géométriques

Exercice 1

1) $|z-i|=|z+1|$. On pose A le point d'affixe i et B le point d'affixe – 1, alors M est sur la médiatrice de [AB]
2) $|iz-1|=|z+2-i|$ est équivalente aux lignes suivantes :
   $$\left|i\left(z-\frac{1}{i}\right)\right|=|z+2-i|$$
   $$|i||(z+i)|=|z+2-i|$$
   $$|(z+i)|=|z+2-i|$$
   On pose A le point d'affixe – i et B le point d'affixe – 2 + i. Alors M est sur la médiatrice de [AB]
3) $|2z-i|=|2-2z|$ est équivalente aux lignes suivantes :
   $$\left|2\left(z-\frac{i}{2}\right)\right|=|-2(-1+z)|$$
   $$|2|\left|\left(z-\frac{i}{2}\right)\right|=|-2||(-1+z)|$$
   $$\left|\left(z-\frac{i}{2}\right)\right|=|z-1|$$
   On pose A le point d'affixe $\frac{i}{2}$ et B le point d'affixe 1. Alors M est sur la médiatrice de [AB].
4) $|-z+1|=|\overline{z}|$ est équivalente à $|z-1|=|z|$. On pose A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 0. Alors M est sur la médiatrice de [AB].

Exercice 2

1) $|z+1-i|=\sqrt{2}$. On pose A le point d'affixe – 1 + i. Alors M est sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
2) $|-iz+i|=2$ est équivalente aux lignes suivantes :
   $$|-i(z-1)|=2$$
   $$|-i||(z-1)|=2$$
   $|z-1|=2$. Donc M est sur le cercle de centre A d'affixe 1 et de rayon 2
3) $|\overline{z}-i|=5$ équivaut à $|z+i|=5$. Donc M est sur le cercle de centre A d'affixe – i et de rayon 5.

Exercice 3

1) $(z+1)(\overline{z}-2)$ est réel équivaut aux lignes suivantes :
   $$(z+1)(\overline{z}-2)=(\overline{z}+1)(z-2)$$
   $$-2z+\overline{z}=z-2\overline{z}$$
   $3(\overline{z}-z)=0$ on pose z = x + i y
   - 6i y = 0
   y = 0 . Donc M est sur l'axe des abscisses.

2) $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ est réel équivaut à $\arg\left(\dfrac{z+2i}{z-4i}\right)=k\pi$. On pose A le point d'affixe – 2i et B le point d'affixe 4 i. On a : $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=k\pi$ Alors M est sur la droite (AB) privée de B.

3) $\dfrac{z}{1-i}=\dfrac{z(1+i)}{2}=\dfrac{(x+iy)(1+i)}{2}=\dfrac{x-y}{2}+i\dfrac{x+y}{2}$ est réel si x + y = 0 donc y = - x. M est donc sur la droite d'équation y = - x.

4) $\dfrac{2-\overline{z}}{3+z}$ est réel équivaut aux lignes suivantes :

$\dfrac{2-\overline{z}}{3+z}=\dfrac{2-z}{3+\overline{z}}$

$\left(2-\overline{z}\right)\left(3+\overline{z}\right)=(2-z)(3+z)$ avec z $\neq 3$

$-\overline{z}-\overline{z}^2+z+z^2=0$

$z-\overline{z}+\left(z-\overline{z}\right)\left(z+\overline{z}\right)=0$

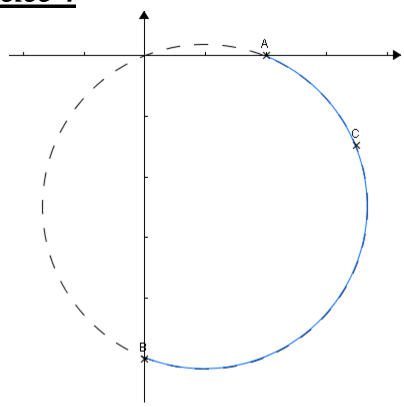
$\left(z-\overline{z}\right)\left(1+z+\overline{z}\right)=0$

$z-\overline{z}=0$ ou $1+z+\overline{z}=0$ on pose z = x + i y

y = 0 ou 2x + 1 = 0 .

M appartient à la réunion de la droite d'équation y = 0 privée de (3 ; 0) et de la droite d'équation x = $-\dfrac{1}{2}$

Exercice 4



1) $\arg\left(\dfrac{z-2}{z+5i}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. On pose A le point d'affixe 2 et B le point d'affixe – 5i. Alors le problème revient à chercher l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. M est donc sur le cercle de diamètre [AB] mais ne peut pas être en B car sinon le dénominateur serait nul. A l'aide d'une figure, on précise M est sur le demi-cercle bleu privé de B.

2) $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{2}$. On pose A le point d'affixe i. Le problème revient à chercher M tel que $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. Autrement dit, M est sur la demi-droite verticale d'extrémité A contenant le point de coordonnées (0 ; 2)

3) $\arg z=\pi$: cela signifie que M est sur le demi-axe des abscisses qui correspond aux négatifs.

Exercice 5

1) $z_B-z_A=-3+4i$ et $z_C-z_D=-3+4i$ donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et ABCD est un parallélogramme. En regardant bien la figure, on s'aperçoit que le parallélogramme n'est pas particulier donc inutile de chercher à montrer autre chose !

2) *Brouillon* : On nous demande de montre qu'il y a <u>une</u> solution réelle donc si on en trouve une, c'est gagné. On regarde la suite (pas pour l'utiliser mais pour nous mettre

sur la voie) il y a une factorisation par z – 3 ! et si notre solution réelle était 3 ?
Rédaction sur la copie : $3^2-(1+3i)3-6+9i=9-3-9i-6+9i=0$ donc 3 est une solution réelle de l'équation.
De même, $(4i)^2-(1+3i)(4i)+4+4i=-16-4i+12+4+4i=0$ donc 4i est une solution imaginaire pure de l'équation.

$(z-3)(z+2-3i)=z^2-z-3iz+9i-6=z^2-(1+3i)z-6+9i$

$(z-4i)(z-1+i)=z^2-z-3iz+4i+4=z^2-(1+3i)z+4+4i$

Les solutions de $\left(z^2-(1+3i)z-6+9i\right)\left(z^2-(1+3i)z+4+4i\right)=0$ sont donc les solutions de $(z-3)(z-4i)(z+2-3i)(z-1+i)=0$ c'est-à-dire S = $\{3;4i;-2+3i;1-i\}$.

On pose w = 1 – i. $|w|=\sqrt{2}$ et $q=-\frac{p}{4}$ donc w = $\sqrt{2}e^{-\frac{ip}{4}}$

3) On a z' = $z^2-(1+3i)z-6+9i$ équivaut aux lignes suivantes

$x'+iy'=(x+iy)^2-(1+3i)(x+iy)-6+9i$

$x'+iy'=\left(x^2-y^2-x+3y-6\right)+i\left(2xy-3x-y+9\right)$

$x'=x^2-y^2-x+3y-6$ et $y'=2xy-3x-y+9$.

f(M) appartient à l'axe des ordonnées si z' est imaginaire pur donc si x' = 0 autrement dit M(x ; y) vérifie : $x^2-y^2-x+3y-6=0$.