# Corrigé écritures

## Exercice 1

1) $z = 4(1-i)+2-3i = 4-4i+2-3i = 6-7i$

2) $z = \dfrac{1}{2-i} = \dfrac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+i}{5}$

3) $z = \dfrac{7+i}{3-2i} = \dfrac{(7+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \dfrac{21+17i-2}{13} = \dfrac{19}{13}+\dfrac{17}{13}i$

## Exercice 2

1) $z = i(1-i)$ alors $\overline{z} = -i(1+i)$

2) $z = (2i-3)(4-2i)$ alors $\overline{z} = (-2i-3)(4+2i)$

3) $z = (1+i)^3$ alors $\overline{z} = (1-i)^3$

4) $z = \dfrac{i(2-i)^3}{-3+i}$ alors $\overline{z} = \dfrac{-i(2+i)^3}{-3-i} = \dfrac{i(2+i)^3}{3+i}$

## Exercice 3

1) $z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ car c'est l'affixe du point de coordonnées (0 ;1) qui est placé sur l'axe des ordonnées donc on lit l'argument directement .

2) $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .

$|z| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = 1$ ; $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ rad et z = $e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .

$|z| = 1$ ; $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ rad et z = $e^{3i\frac{\pi}{4}}$

4) $z = -1 + i\sqrt{3}$ ;

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$ ; $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d'où : $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ rad . On a donc z = $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

5) $z = i\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

En utilisant les résultats des questions 1 et 2 on a $z = e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{6}}$

6) $z = \left(-1+i\sqrt{3}\right)^2$ .

En utilisant le résultat de la question 4 on a $z = \left(2e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = 4e^{\frac{4i\pi}{3}}$

7) $z = (1-i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ .

On va décomposer en deux temps le calcul : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3}+i$ .

$|z_1| = \sqrt{2}$ ; $\cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ rad donc $z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ .

$|z_2| = 2$ ; $\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_2 = \frac{1}{2}$ donc $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ rad donc $z_2 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$ .

Donc z = $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{12}}$

8) $z = \frac{-\sqrt{3}+i}{2+2i}$ . On pose $z_1 = -\sqrt{3}+i$ et $z_2 = 2 + 2i$ .

$|z_1| = 2$ d'où $\cos\theta_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1 = \frac{1}{2}$ donc $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$ et $z_1 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$ .

$|z_2| = 2\sqrt{2}$ et $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ donc $z_2 = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ .

On conclut z = $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$

9) $z = \frac{i(i+1)}{2(1-i\sqrt{3})}$ . On pose $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ . Par la question 1 , i = $e^{\frac{i\pi}{2}}$ . et

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ d'où : $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ .

$|z_2| = 2$ et $\theta_2 = -\frac{\pi}{3}$ donc $z_2 = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ .

D'où : z = $\frac{e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2\times 2e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\frac{13i\pi}{12}}$

10) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$ . D'après la question précédente : 1 + i = $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et 1 – i = $\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$

d'où : $\frac{1+i}{1-i} = e^{\frac{i\pi}{2}}$ donc z = $e^{5i\pi} = -1$ .

***Exercice 4***

1) z = $\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ . $|\sqrt{6} - i\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$ .

z = $\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{6}}$ .

z' = $\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ .

$\frac{z}{z'} = e^{\frac{i\pi}{12}}$ .

2) $\frac{z}{z'} = e^{\frac{i\pi}{12}} = \cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}$ donc $\cos\frac{\pi}{12} = \mathrm{Re}(\frac{z}{z'})$ .

Ecrivons $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique :

$$\frac{z}{z'}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}=\frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$ donc

$\cos\frac{\pi}{12}=\mathrm{Re}(\frac{z}{z'})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et de même $\sin\frac{\pi}{12}=\mathrm{Im}(\frac{z}{z'})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$ équivaut aux lignes suivantes :

$$\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}\cos x+\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12}\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}-x\right)=\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{12}-x=\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{12}-x=-\frac{\pi}{3}$

$x=-\frac{\pi}{4}$ rad ou $x=\frac{5\pi}{12}$ rad .