Corrigé exercices supplémentaires sur les complexes

Exercice 1

1) On pose z = x + i y
   Initialisation : vrai au rang 1 car $z^1 = z$
   Hérédité : supposons $z^n = x_n + iy_n$ au rang n avec x_n et y_n entiers
   Alors $z^{n+1} = zz^n = (x+iy)(x_n+iy_n) = (xx_n - yy_n) + i(xy_n + yx_n)$
   Puisque x, x_n, y et y_n sont des entiers alors $xx_n - yy_n$ et $xy_n + yx_n$ sont aussi des entiers
   Donc $z^n = x_n + iy_n$ pour tout n avec x_n et y_n entiers
2) Soit z = x + i y alors $|z|^2 = x^2 + y^2$. On peut donc considérer A = $|z|^2$
   Alors $A^n = \left(|z|^2\right)^n = |z^n|^2 = x_n{}^2 + y_n{}^2$ d'où la propriété

Exercice 2

$$2\sin^2\frac{a}{2}z^2 - z\sin a + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta = \sin^2 a - 4\sin^2\frac{a}{2} = 4\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2} - 4\sin^2\frac{a}{2} = 4\sin^2\frac{a}{2}\left(\cos^2\frac{a}{2} - 1\right) = -4\sin^4\frac{a}{2}$$

Premier cas

$\sin^4\frac{a}{2} = 0$ si $\frac{a}{2} = k\pi$ c'est-à-dire si $a = 2k\pi$. Dans ce cas, $\Delta = 0$ et l'équation a une seule solution z = $\dfrac{\sin a}{4\sin^2\frac{a}{2}} = \dfrac{2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}}{4\sin^2\frac{a}{2}} = \dfrac{\cos\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}}$

Deuxième cas

Si $a \neq 2k\pi$, alors $\Delta < 0$ et donc il y a deux solutions complexes conjuguées

$$z = \frac{\sin a \pm 2i\sin^2\frac{a}{2}}{4\sin^2\frac{a}{2}} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \pm 2i\sin^2\frac{a}{2}}{4\sin^2\frac{a}{2}} = \frac{\cos\frac{a}{2} \pm i\sin\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}} = \frac{e^{\pm i\frac{a}{2}}}{2\sin\frac{a}{2}}$$

Exercice 3

1) $z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n$. On a $z_0 = 8$
   Alors $z_1 = 2\left(1+i\sqrt{3}\right)$
   Et $z_2 = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2} = -1+i\sqrt{3}$
   D'où $z_3 = \dfrac{\left(i\sqrt{3}+1\right)\left(i\sqrt{3}-1\right)}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1$
2) Calculons $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{4} = i\sqrt{3}$ donc $\arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
   et $\left(\overrightarrow{OM_{n+1}}; \overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc OM_nM_{n+1} est un triangle rectangle en M_{n+1}.

Corrigé exercices supplémentaires sur les complexes

Exercice 4

1) $u^7 = e^{2i\pi} = 1$

2) On note $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$

$$S = u+u^2+u^4 = e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{8i\pi}{7}} = e^{i\left(2\pi-\frac{12\pi}{7}\right)} + e^{i\left(2\pi-\frac{10\pi}{7}\right)} + e^{i\left(2\pi-\frac{6\pi}{7}\right)} = e^{-\frac{12i\pi}{7}} + e^{-\frac{10i\pi}{7}} + e^{-\frac{6i\pi}{7}}$$

$$= \overline{e^{\frac{12\pi i}{7}}} + \overline{e^{\frac{10i\pi}{7}}} + \overline{e^{\frac{6i\pi}{7}}} = \overline{u^6} + \overline{u^5} + \overline{u^3} = \overline{T}$$

$$\mathrm{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7}\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\frac{4\pi}{7}\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)$$

Or $1-\cos X \geq 0$ et $\frac{2\pi}{7} \leq \pi$ donc $\sin\frac{2\pi}{7} \geq 0$, de même $\sin\frac{4\pi}{7} \geq 0$ et donc Im(S) > 0

3) $\sum_{k=0}^{6} u^k = \left(\frac{1-u^7}{1-u}\right) = 0$ et $S + T = \sum_{k=0}^{6} u^k - 1 = -1$

$ST = u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^3$ en utilisant la question1

$ST = S + T + 3 = 2$

S et T sont donc solutions de l'équation : $x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = -7$

$S = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $T = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

Exercice 5

1) $z' = \frac{\overline{z}(z-1)}{\overline{z}-1}$ donc $z_{o'} = 0$

2) M est sur le cercle si OM = 1 ce qui équivaut à : $|z| = 1$. Ceci est également équivalent à $z\overline{z} = 1$. On obtient alors l'équivalence entre M sur le cercle et

$$z' = \frac{\overline{z}(z-1)}{\overline{z}-1} = \frac{z\overline{z}-\overline{z}}{\overline{z}-1} = \frac{1-\overline{z}}{\overline{z}-1} = -1 = z_B$$

3) $z' = \frac{\overline{z}(z-1)}{\overline{z}-1} = z$ équivaut aux lignes suivantes sachant que z non égal à 1

$$\frac{z\overline{z} - \overline{z} - z\overline{z} + z}{\overline{z}-1} = 0$$

$$\frac{z-\overline{z}}{\overline{z}-1} = 0$$

$z = \overline{z}$ c'est-à-dire z est réel

Les points invariants par f sont donc les points situés sur l'axe des abscisses privé de (1 ; 0)

4) $|z'| = \frac{|\overline{z}||z-1|}{|\overline{z}-1|} = \frac{|z||z-1|}{|z-1|} = |z|$ pour z non égal à 1

5) $\dfrac{z'+1}{z-1} = \dfrac{\bar{z}(z-1)+\bar{z}-1}{\bar{z}-1} \times \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}-(z+\bar{z})+1} = \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)+1}$ réel

6) $\arg\left(\dfrac{z'+1}{z-1}\right) = k\pi$ puisque le nombre est réel donc $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM'}\right) = k\pi$ donc les droites (AM) et (BM') sont parallèles si M n'est pas sur C (car sinon M' = B)

7) $\dfrac{z'-z}{z-1} = \dfrac{\bar{z}(z-1)-z\bar{z}+z}{\bar{z}-1} \times \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{z-\bar{z}}{|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)+1} = \dfrac{2\,\mathrm{Im}(z)}{|z|^2-2\,\mathrm{Re}(z)+1}i$ est imaginaire pur donc $\arg\left(\dfrac{z'-z}{z-1}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ et $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{MM'}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$. Les droites (AM) et (MM') sont perpendiculaires si M n'est pas sur l'axe des réels car sinon M = M'

8) Si M est sur le cercle, M' = B
Si M est sur l'axe des abscisses, M' = M
Sinon : on trace la parallèle à (AM) passant par B et la perpendiculaire à (AM) passant par M. Leur point d'intersection est M'