Ecriture algébrique , écriture trigonométrique , écriture exponentielle

Ecriture algébrique

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est de la forme x + i y, avec x et y des réels.
La partie x s'appelle partie réelle, la partie y s'appelle partie imaginaire.
Dans le plan, x + i y correspond au point de coordonnées (x ; y). On dit que x + i y est l'affixe de ce point.

Exemples
3 + 2 i est une écriture algébrique
Par contre z + i z' avec z et z' complexes, n'est pas une écriture algébrique.

- Quand l'énoncé demande de mettre sous forme algébrique, il suffit souvent de développer

Cas particulier des quotients :

Pour mettre un quotient sous écriture algébrique, il faut multiplier par le conjugué du dénominateur
Exemple
Donner l'écriture algébrique de z = $\frac{3+2i}{5-3i}$.
La forme conjuguée de 5 – 3 i est 5 + 3 i donc on multiplie numérateur et dénominateur par cette expression

$$z = \frac{\left((3+2i)(5+3i)\right)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{15+9i+10i-6}{25-9i^2} = \frac{9+19i}{25+9} = \frac{9+19i}{34} = \frac{9}{34}+\frac{19}{34}i$$

- En fait , le but est de ne plus avoir de i au dénominateur

Ecritures trigonométrique et exponentielle

Ces deux écritures sont identiques par le procédé de recherche , seule l'écriture finale change .
Soit un complexe z = x + i y .
Pour l'écrire sous forme trigonométrique ou exponentielle , on a besoin de son module et de son argument

Module d'un complexe

Les formules suivantes sont à savoir car elles permettent de gagner du temps dans les calculs :

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$|zz'| = |z||z'|$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$
$$|z|^2 = z\bar{z}$$
$$|\bar{z}| = |z|$$

Exemple 1
Déterminer le module de z = $2+2i$.
On utilise $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Exemple 2

Déterminer le module de z = $\dfrac{2+2i}{3-5i}$.

On va chercher séparément le module du numérateur puis celui du dénominateur :

$|2+2i| = 2\sqrt{2}$ et $|3-5i| = \sqrt{34}$ donc $|z| = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{34}} = \dfrac{\sqrt{68}}{17} = \dfrac{2\sqrt{17}}{17}$

Exemple 3

Déterminer le module de z = $\dfrac{5+8i}{5-8i}$

On remarque que $5-8i = \overline{5+8i}$ donc $|5+8i| = |5-8i|$ et $|z| = \dfrac{|5+8i|}{|5-8i|} = 1$

- Toujours penser à décomposer la recherche du module (numérateur , dénominateur , puissance …)

Interprétation graphique :

- Si on demande une interprétation graphique ou géométrique d'un module , c'est toujours une distance : $|z_B - z_A| = AB$

Argument d'un complexe

Ces formules sont à savoir :

$\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$ avec arg(z) = θ

$\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2k\pi$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' + 2k\pi$

De même que pour les modules , on va décomposer la recherche de l'argument .

Exemple 1

Déterminer un argument de z = 2 + 2i .

On a vu que $|2+2i| = 2\sqrt{2}$. Soit $\theta = \arg z$ alors $\cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et

$\sin\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Or , on connaît très bien ses valeurs remarquables ce qui permet de reconnaître tout de suite celles-ci : $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ rad .

En cas de problème avec les formules de trigonométrie , il y a une fiche rappel dans la partie bases de première !

Exemple 2

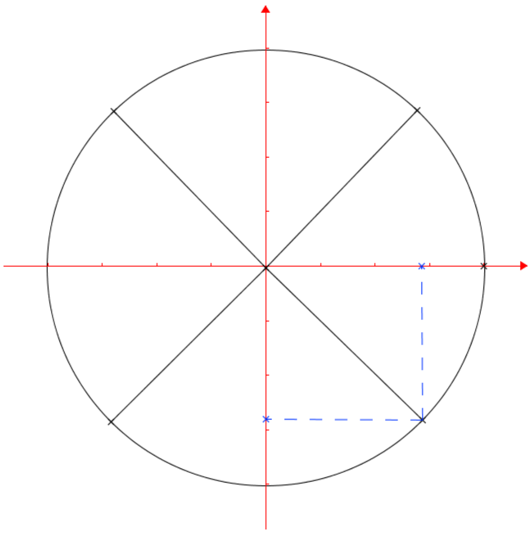
Déterminer un argument de z = $\dfrac{2-2i}{-1-\sqrt{3}i}$

Surtout , ne pas chercher à mettre ce quotient sous forme algébrique .
On va procéder en trois étapes :

1. argument de $z_1 = 2 - 2i$
2. argument de $z_2 = -1-\sqrt{3}i$
3. argument de z

Commençons par chercher un argument de z_1 .

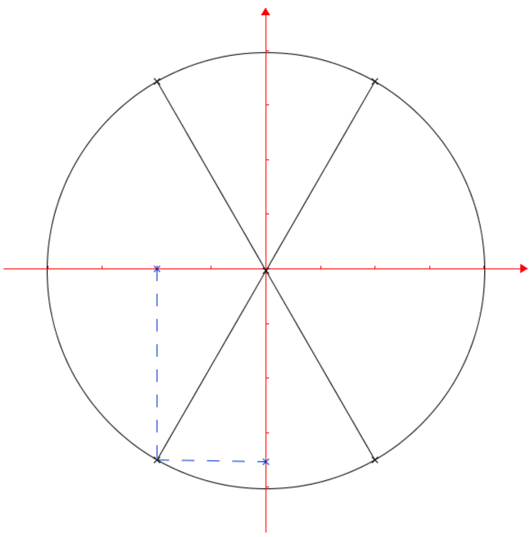
$|z_1| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donc $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



On est donc dans la famille des $\dfrac{\pi}{4}$, on s'aide d'un cercle trigonométrique : on partage en secteurs de $\dfrac{\pi}{4}$ radians , et on regarde celui qui correspond à un cosinus positif et à un sinus négatif

On obtient : $\theta_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ rad

Cherchons maintenant un argument de z_2



$\left|-1-\sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ donc

$\cos\theta_2 = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On est donc dans la famille des $\dfrac{\pi}{3}$. On utilise le cercle trigonométrique découpé en secteurs de $\dfrac{\pi}{3}$ rad et on cherche l'angle qui a le cosinus et le sinus négatifs .

On obtient donc $\theta_2 = -\dfrac{2\pi}{3}$ rad

On applique maintenant la formule du quotient

$$\arg z = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad .}$$

- Il est important de décomposer (numérateur puis dénominateur) car si on essaie de mettre sous forme algébrique , bien souvent on aboutit à des valeurs de cosinus et sinus qui ne font pas partie des valeurs remarquables .

Interprétation graphique

- Si on demande une interprétation d'un argument , c'est toujours un angle orienté de vecteurs : $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) \bmod 2\pi$

Ecriture trigonométrique

Quand on a trouvé le module et un argument on applique la formule suivante :

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Exemple 1

Avec les résultats précédents , l'écriture trigonométrique de 2 + 2i est :

$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

- Attention : pour avoir une forme trigonométrique , il faut que le nombre en facteur soit positif et avoir un + devant le i .

Exemple 2

$z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ n'est pas écrit sous forme trigonométrique (à cause du $-i\sin\dfrac{\pi}{3}$) .

On transforme alors z en cherchant quel angle a même cosinus mais un sinus opposé :

$z = 3\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$: c'est une forme trigonométrique et donc arg z = $-\dfrac{\pi}{3}$ rad .

Ecriture exponentielle

L'écriture trigonométrique peut se résumer par une écriture exponentielle qui est plus pratique dans les calculs grâce aux formules des puissances :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Ecriture algébrique , écriture trigonométrique , écriture exponentielle

Exercices

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique :

1) $z = 4(1-i) + 2 - 3i$
2) $z = \dfrac{1}{2-i}$
3) $z = \dfrac{7+i}{3-2i}$

Exercice 2

Déterminer le conjugué de :

1) $z = i(1-i)$
2) $z = (2i-3)(4-2i)$
3) $z = (1+i)^3$
4) $z = \dfrac{i(2-i)^3}{-3+i}$

Exercice 3

Déterminer l'écriture exponentielle de :

1) $z = i$
2) $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
3) $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
4) $z = -1 + i\sqrt{3}$
5) $z = i\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
6) $z = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^2$
7) $z = (1-i)\left(\sqrt{3} + i\right)$
8) $z = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2+2i}$
9) $z = \dfrac{i(i+1)}{2(1-i\sqrt{3})}$
10) $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$

Exercice 4

Soient les nombres complexes z = $\dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et z' = 1 – i

1) Mettre sous forme trigonométrique z , z' et $\dfrac{z}{z'}$
2) En déduire la valeur de $\cos\dfrac{p}{12}$ et celle de $\sin\dfrac{p}{12}$
3) Résoudre $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\sin x = 2$